Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов-заочников химико-технологических, инженерно-технических и экономических специальностей

Минск
2002

УДК 51
Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета.

Составители: А.М. Волк, В.В. Игнатенко, А.В. Яценко
Под общей редакцией профессора В.М. Марченко
Рецензенты: доц. БГУ В.В. Крахотко,
доц. БГТУ Г.С. Бокун

Приведены задания, основные теоретические сведения, типовые задачи с решениями и рекомендациями по выполнению контрольных работ студентами-заочниками второго курса химико-технологических, инженерно-технических и экономических специальностей.

По тематическому плану внутривузовских изданий учебно-методической литературы на 2002 год. Поз. .
Для студентов-заочников второго курса.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Составители: Волк Анатолий Матвеевич,
Игнатенко Василий Васильевич,
Яценко Анатолий Валентинович.

Редактор . Корректор

Подписано в печать . Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,7. Усл. кр.-отт. 2,7. Уч.-изд. л. 2,4
Тираж 600 экз. Заказ
Белорусский государственный технологический университет.
Лицензия ЛВ №276 от 15.04.98.
220050. Минск, Свердлова, 13а.
Отпечатано на ротапринте Белорусского государственного технологического университета. 220050. Минск, Свердлова, 13.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам-заочникам второго курса для выполнения контрольных работ по высшей математике. Данное пособие завершает серию из двух методических пособий, изданных в 2001 и 2002 годах. В нем изложены некоторые вопросы теории функций многих переменных, числовых и степенных рядов, элементы теории вероятностей. Эти темы служат математической базой для изучения ряда разделов общей физики, теоретической механики, гидродинамики, математической и общей статистики и других дисциплин. Изучение указанных разделов традиционно завершает изучение курса высшей математики студентами химико-технологических, инженерно-технических и экономических специальностей и позволяет перейти по мере необходимости к изучению специальных разделов математики. Программа курса высшей математики приведена в пособии 2002 года.

В пособии приведены основные теоретические сведения и примеры решения типовых задач. Приведены задания для выполнения контрольных работ по разобранным темам.

Данное пособие позволит студентам заочной формы обучения изучить основы теоретического материала по перечисленным выше разделам, самостоятельно выполнить контрольные работы и успешно сдать экзамен. Основные определения и теоремы изложены достаточно подробно, приведены методы решения задач, но ограниченный объём пособия не позволил привести доказательства результатов. Непрерывная нумерация задач позволяет легко составлять варианты контрольных работ для студентов различных специальностей.

В приложениях приведены таблицы наиболее часто используемых в теории вероятностей функций, что позволит студентам решать соответствующие задачи, не обращаясь к дополнительной литературе. Для более глубокого изучения соответствующих разделов в пособии приведен список доступной литературы.

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. Экстремумы функциии нескольких переменных

Одной из основных задач исследования функций нескольких переменных является задача нахождения экстремумов функций. Рассмотрим эту задачу на примере функции двух переменных.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Эта точка называется точкой максимума (минимума), если существует такая ε − окрестность точки M_0, для всех точек $M(x, y)$, которой выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$).

Точка максимума и минимума функции называются точками экстремума.

<u>Теорема</u> (необходимые условия экстремума). Пусть функция $f(x, y)$ имеет в некоторой точке экстремум. Тогда, если в этой точке существую частные производные $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, то они равны 0.

Следовательно, "подозрительными" на наличие экстремума являются точки, в которых частные производные первого порядка либо не существуют, либо равны нулю. Эти точки называются <u>критическими</u>.

Проверить наличие экстремума в таких точках позволяет теорема о достаточных условиях экстремума.

<u>Теорема.</u> Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет в некоторой окрестности критической точки M_0 непрерывные частные производные второго порядка. Тогда, если в этой точке

1) $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$, $f''_{xx} < 0$, то M_0 – точка максимума;

2) $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$, $f''_{xx} > 0$, то M_0 – точка минимума ;

3) $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

4) $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$, то в точке M_0 экстремум может быть, а может и не быть.

<u>Задача 1</u>. Исследовать на экстремум функцию

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Найдем критические точки этой функции, решив систему

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0. \end{cases}$$

Так как $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$, то эта система принимает вид

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^3(x-1) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Тогда $y_1 = 0^2 = 0$ и $y_2 = 1^2 = 1$, т.е. точки $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$ – критические точки.

Проверим выполнение в этих точках достаточных условий экстремума. Т.к. $f''_{xx} = 6x$, $f''_{yy} = 6y$, $f''_{xy} = -3$, то в точке $P_1(0,0)$ $f''_{xx}(P_1)\cdot f''_{yy}(P_1) - f''^{\,2}_{xy}(P_1) = 0\cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Следовательно, в точке $P_1(0,0)$ экстремума нет. В точке $P_2(1,1)$ $f''_{xx}(P_2)\cdot f''_{yy}(P_2) - f''^{\,2}_{xy}(P_2) = 6\cdot 6 - 9 > 0$ и $f''_{xx} = 6\cdot 1 > 0$. Следовательно, точка $P_2(1,1)$ – точка минимума.

1.2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в замкнутой ограниченной области *D*, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках области *D*, либо на границе области.

Для нахождения этих значений необходимо:

– найти все критические точки в области *D* и вычислить в них значения функции $f(x,y)$;

– найти наибольшее и наименьшее значение $f(x,y)$ на границе области *D*;

– сравнив значения функции $f(x,y)$, найденные в пунктах 1-2, выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 1 - x + x^2 + 2y$ в области *D*, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Решение. Изобразим область *D* (см. рис. 1).

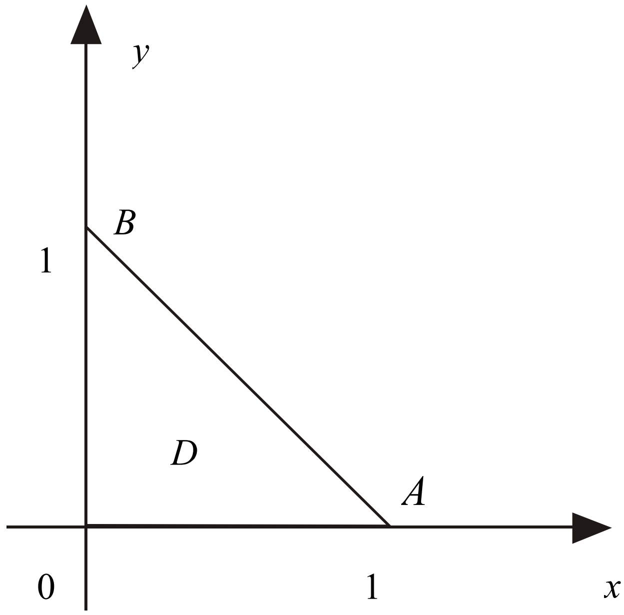

Рис. 1.

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2 \neq 0$, то критических точек у функции *z* нет. Исследуем функцию *z* на границе области *D*, т.е. на отрезках *OA*. *OB* и *AB*.

На отрезке *OA* $y = 0$, $z = 1 - x + x^2$, $x \in [0;1]$. Найдем критические точки функции $z(x,0)$ на отрезке *OA*, решив уравнение $\dfrac{dz}{dx} = -1 + 2x = 0$, т.е. $x = \dfrac{1}{2}$ – критическая точка. $z\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Найдем значение функции *z* на концах отрезка $OA. z(O) = z(0,0) = 1$, $z(A) = z(1,0) = 1 - 1 + 1 = 1$.

На отрезке *OB* $x = 0$, $z = 1 + 2y$, $y \in [0,1]$. $\dfrac{dz}{dy} = 2 \neq 0$, т.е. критических точек нет. $z(B) = z(0,1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ $z(0)$ найдено ранее.

На отрезке *AB* $y = 1 - x$ и $z = 1 - x + x^2 + 2(1 - x) = x^2 - 3x + 3$,

$x \in [0,1]$. $dzdx = 2x - 3 = 0$. Так как $x = \frac{3}{2} \notin [0;1]$, то эта точка не являет ся критической. $z(A)$ также найдено ранее.

Итак $z_{наиб.} = z(0,1) = 3$, $z_{наим.} = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{3}{4}$.

1.3. Элементы теории поля

При изучении различных физических процессов широко используется понятие скалярного и векторного поля. Примерами скалярных полей являются поле температур внутри нагретого тела, поле плотной массы. Поле скоростей потока жидкости, поле вектора магнитной индукции – это примеры векторных полей.

Пусть D – некоторая область на плоскости или в пространстве. Говорят, что в области D задано скалярное поле, если каждой точке M из области D ставится в соответствие некоторое число $u = u(M)$.

Аналогично, если каждой точке M области D ставится в соответствие определенный вектор $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то говорят, что в области D задано векторное поле.

Иначе говоря, скалярное поле задается с помощью числовой функции, а векторное поле с помощью векторной функции.

Рассмотрим далее основные операции, связанные со скалярными и векторными полями.

<u>Градиент скалярного поля.</u>

Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат с одиночными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленными соответственно вдоль оси Ox, Oy и Oz, и пусть в некоторой области D этого пространства задано скалярное поле с помощью дифференцируемой функции $u = u(x, y, z)$.

Тогда в каждой точке области D определен вектор

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \qquad (1.1)$$

который называется <u>градиентом</u> скалярного поля $u = u(x, y, z)$.

Равенство (1.1) часто записывают с помощью символа ∇, называемого оператором Гамильтона:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1.2)$$

Используя (1.2), получим

$$\nabla u = \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ т.е. } \nabla u = grad\, u. \qquad (1.3)$$

<u>Производная по направлению.</u>

Пусть в области *D* задано скалярное поле $u = u(M)$, M_0 – некоторая точка этой области, а вектор $\vec{l}$ – некоторый вектор, задающий направление в точке M_0. Пусть M_1 – другая точка области *D*, такая, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен вектору $\vec{l}$, и $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \rho$.

Если существует предел

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{\rho}, \qquad (1.4)$$

то он называется <u>производной</u> скалярного поля в точке M_0 <u>по направлению вектора</u> $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$. Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{\rho}. \qquad (1.5)$$

Если $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$, т.е. l_x, l_y, l_z – координаты вектора $\vec{l}$ в прямоугольной декартовой системе координат *OXYZ*, то

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|},\ \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|},\ \cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|} \qquad (1.6)$$

– это направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ (здесь $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$ – длина вектора $\vec{l}$).

В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (1.7)$$

Из определения производной вытекает, что она определяет скорость измерения функции $u = u(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$. Можно показать, что градиент скалярного поля задает направление наибольшего изменения функции u.

Задача 3. Дана функция $z = x^2 y + yx^2$. Найти в точке $M_0(2,1)$ $grad\, z$ и производную в направлении вектора $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$, то $\frac{\partial z(2,1)}{\partial x} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 5$, $\frac{\partial z(2,1)}{\partial y} = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

По формуле (1.1), записанной для двумерного случая, получим $grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$, или $grad\, z(M_0) = 5\vec{i} + 8\vec{j}$.

Вычислим направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ по формуле (1.6):

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5},\ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}.$$

По формуле (1.7) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 5 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{44}{5} = 8{,}8.$$

Дивергенция векторного поля.

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат. Тогда заранее векторной функции $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ равномерно заданию трех скалярных функций, т.п. любой вектор можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Итак, пусть

$$\vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\,\vec{k} \tag{1.8}$$

причем P, Q и R – дифференцируемые функции.

Дивергенцией векторного поля (1.8) в некоторой точке называется число, обозначаемое символом $div\vec{F}$ и вычисляемое по формуле

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{1.9}$$

Используя оператор Гамильтона (1.9) символически можно записать следующим образом:

$$div\vec{F} = \nabla\vec{F}, \tag{1.10}$$

где $\nabla\vec{F}$ – скалярное произведение оператора Гамильтона на векторную функцию $\vec{F}$. Действительно,

$$div\vec{F}=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля.

Ротором или вихрем векторного поля (1.8) в некоторой точке называется вектор, обозначаемый символом $rot\vec{F}$ и вычисляемый по формуле

$$rot\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.11)$$

Используя оператор Гамильтона (1.11) можно записать в виде

$$rot\vec{F}=\nabla\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}, \qquad (1.12)$$

где $\nabla\vec{F}$ – векторное произведение оператора Гамильтона на векторную функцию $\vec{F}$.

Дивергенция и ротор векторного поля используются для анализа векторных полей.

Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным в области *D*, если поверхностный интеграл $\iint\limits_{s}\left(\vec{F},\vec{n}\right)d\sigma$ – (поток векторного поля) равен нулю через любую кусочно-гладкую замкнутую несамопересекающуюся поверхность *S*, расположенную в *D* (здесь $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности *S*, задающей ее ориентацию).

Необходимым и достаточным условием соленоидальности векторного поля (1.8) в объемно-односвязной области является равенство нулю его дивергенции во вех точках этой области:

$$div\vec{F}=0 \qquad (1.13)$$

Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным в области *D*, если криволинейный интеграл $\oint\limits_{L}\left(\vec{F},\vec{\tau}\right)ds$ (циркуляция векторного поля) равен нулю по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой *L*, расположенной в области *D* (здесь $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к кривой *L*).

Необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля (1.8) в поверхностно – односвязной области *D* является равенство нулю его ротора во всех точках этой области:

$$rot\vec{F} = 0. \tag{1.14}$$

Для потенциального поля $\vec{F}$ существует такая скалярная функция u, что

$$\vec{F} = grad\, u. \tag{1.15}$$

<u>Задача 4.</u> Проверить, является ли векторное поле $\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$ соленоидальным и потенциальным. В случае потенциальности найти его потенциал.

<u>Решение</u>. Для проверки соленоидальности векторного поля $\vec{F}$ вычислим его дивергенцию по формуле (1.9). Т.п. в нашем случае $P(x,y,z) = 2x + yz$, $Q(x,y,z) = 2y + xz$, $R(x,y,z) = 2z + xy$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 2$ и $div\,\vec{F} = 2 + 2 + 2 = 6$.

Поскольку $div\,\vec{F} \neq 6$, то векторное поле $\vec{F}$ не является соленоидальным.

Для проверки потенциальности векторного поля $\vec{F}$ вычислим его по формуле (1.11). Учитывая, что $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z$, получим $rot\,\vec{F} = (x - x)\vec{i} + (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = 0$.

Поскольку $rot\,\vec{F} = 0$, то векторное поле $\vec{F}$ потенциально.

Найдем его потенциал, т.е. такую функцию $u = u(x,y,z)$, что $grad\,u = \vec{F}$. Расписав последнее равенство по координатам, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + yz \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + xz \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z + xy \tag{1.18}$$

Интегрируя (1.16), получим

$$u = \int (2x + yz)dx + \Psi(y,z) = x^2 + xyz + \Psi(y,z).$$

Подставим найденное выражение в (1.17):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 xyz + \Psi(y,z)\right) = 2y + xz \text{, т.е.}$$

$$xz + \frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial y} = 2y + xz \text{, или } \frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial y} = 2y \text{ .}$$

Отсюда $\Psi(y,z) = \int 2ydy + \varphi(z) = y^2 + \varphi(z)$. Следовательно $u = x^2 + y^2 + xyz + \varphi(z)$. Подставив последнее выражение в (1.18) найдем $\varphi(z)$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + xyz + \varphi(z)\right) = 2z + xy, \quad xy + \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = 2z + xy, \quad \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = 2z,$$

$$\varphi(z) = \int 2zdz + c = z^2 + c \text{ .}$$

Итак $u = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ – потенциал векторного поля $\vec{F}$.

2. РЯДЫ

2.1. Числовые ряды

Пусть задана бесконечная последовательность чисел u_n, $n = 1,2,3,...$. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (2.1)$$

называется числовым рядом. Числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называют членами ряда, причем u_n – его n – м членом.

Конечная сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n, \qquad (2.1)$$

слагаемыми которой являются первые n членов ряда (2.1), называется n – й частичной суммой данного ряда.

Ряд (2.1) называется сходящимся, если существует конечный предел его частичной суммы

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (2.3)$$

который и называется суммой ряда. В этом случае принимают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (2,4)$$

В противном случае ряд называется расходящимся.

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} =$ $= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} ...$.

Решение. Составим n – ю частичную сумму ряда: $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$. Члены S_n являются членами геометрической прогрессии с $b_1 = 1$ и $q = \frac{1}{3}$. Вычислим их сумму по формуле $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ и найдем ее предел. Таким образом

$$S_n = \frac{1(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) \text{ и } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{\infty}) = \frac{3}{2}.$$

Данный ряд сходится, причем $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}$.

Полезно иметь ввиду, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ $(a\neq 0)$ сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

При изучении сходимости рядов используют необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Обратное утверждение неверно.

<u>Задача 2</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$.

<u>Решение</u>. Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$, то необходимый признак сходимости не выполнен. Следовательно данный ряд расходится.

<u>Задача 3</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

<u>Решение</u>. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$, то необходимый признак сходимости выполнен. О сходимости ряда на основании этого признака ничего нельзя сказать. Для изучения его сходимости нужно использовать достаточные признаки сходимости.

Рассмотрим далее достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}u_n,\ u_n>0,\ \text{n=1, 2, 3…} \tag{2.5}$$

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тогда, если $l<1$, то ряд (2.5) сходится, если $l>1$, то ряд (2.5) расходится.

Примечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не существует или же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то признак Даламбера не позволяет установить, сходится ли ряд (2.5).

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Решение. Этот ряд по признаку Даламбера сходится, т.к.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}:\frac{n^2}{3^n}=\frac{3^n}{3^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}<1.$$

Радикальный признак Коши.

Пусть дан ряд с положительные членами
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ u_n>0,\ \text{n=1, 2, 3…} \qquad (2.6)$$
и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Тогда, если $l<1$, то ряд (2.6) сходится, если $l>1$, то ряд (2.6) расходится.

Примечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ не существует или же $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то радикальный признак Коши не позволяет установить, сходится ли ряд (2.6).

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$.

Решение. Этот ряд по радикальному признаку Коши сходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{4}}{2+\frac{3}{4}}+\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}<1.$

Интегральный признак Коши. Если положительная, невозрастающая и непрерывная при $x\ge a\ge 1$ функция $f(x)$ такова, что $f(n)=u_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Этот ряд по интегральному признаку Коши расходится, т.к. расходится несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$. Действительно $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} == \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim\limits_{b \to \infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b =$
$= \lim\limits_{b \to \infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = +\infty$

Примечание. С помощью интегрального признака Коши можно доказать, что обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Признак сравнения 1. Пусть $u_n \ge 0$, $v_n \ge 0$ и $u_n \le v_n$ (n=1, 2, 3…). Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2.7)$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2.8)$$

Если же ряд (2.8) расходится, то расходится и ряд (2.7).

Признак сравнения 2. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n}$, то ряды (2.7) и (2.8) с положительными членами сходятся или расходятся одновременно.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + \sqrt{n}}$.

Решение. Возьмем для сравнения сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (этот ряд сходится, т.к. это обобщенный гармонический ряд с $\alpha = 2$). Т.к. $\frac{1}{n^2 + n + \sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$, то по признаку сравнения 1 сходится и наш ряд.

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Возьмем для сравнения расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (этот ряд расходится, т.к. это обобщенный гармонический ряд с

$\alpha = \frac{1}{2}$). $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1$ (т.к. $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ – это 1-ый замечательный предел), следовательно, по признаку сравнения 2 расходится и наш ряд.

Рассмотрим знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

Ряд называется знакопеременным, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.

Ряд называется знакочередующимся, если он имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots , \tag{2.9}$$

где $u_n > 0$, u=1, 2, 3… .

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница).

Если $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ и $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$, $n = 1,2,3...$, то знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится, а его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Задача 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому проверим выполнение условий признака Лейбница. Т.к. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, а $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$, то оба условия признака Лейбница выполнены. Следовательно, наш знакочередующийся ряд сходится.

Введем понятие абсолютной и условной сходимости.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящим, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов сходится.

Сходящийся знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, не являющийся абсолютно сходящимся, называется условно сходящимся.

Примером условно сходящегося ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Действительно, как показано в задаче 9 этот знакочередующийся ряд по признаку Лейбница сходится. Но ряд составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся гармоническим рядом. Следовательно, исходный ряд сходится, но не абсолютно, а значит он является условно сходящимся рядом.

2.2. Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \tag{2.10}$$

где a_n, n = 0, 1, 2, … – постоянные числа, называется степенным рядом.

Множество значений аргумента x, для которых степенной ряд (2.10) сходится, называется областью сходимости этого ряда.

При нахождении области сходимости степенного ряда используется понятие радиуса сходимости и интервала сходимости степенного ряда.

Величина $R \geq 0$ (где R – число или символ $+\infty$) такая, что при всех x удовлетворяющих неравенству $|x| < R$, ряд (2.10) сходится, и при всех x удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, ряд (2.10) расходится, называется радиусом сходимости степенного ряда (2.10).

Известно, что у всякого степенного ряда существует радиус сходимости.

Множество точек x, для которых $|x| < R$, называется интервалом сходимости ряда (2.10).

Очевидно, что интервал сходимости есть открытый интервал (R, R) с центром в точке $x = 0$.

На концах интервала сходимости, т.е. при $x = \pm R$ ряд (2.10) может либо сходиться, либо расходиться.

Отметим, что у некоторых степенных рядов интервал сходимости вырождается в точку (если R=0), а у других – охватывает всю ось Ох (если R=+∞).

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить либо по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.11}$$

либо по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}, \tag{2.12}$$

если стоящее в правых частях этих равенств пределы существуют. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0$, то R=+∞.

Задача 10. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}\frac{x^n}{n2^n}$.

Решение. Вычислим радиус сходимости степенного ряда (2.11). Т.к. $a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n}$, то $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$ и $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^{n+1}}{n\cdot 2^n}\right| = 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 1 = 2$. Т.к. $R = 2$, то (–2,2) – интервал сходимости нашего ряда. Следовательно, при $|x| < 2$ ряд сходится, а при $|x| > 2$ – расходится. Исследуем сходимость степенного ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Подставив в исходный степенной ряд $x_1 = 2$, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это обыкновенный гармонический ряд. Т.к. он расходится, т.е. степенной ряд в точке $x_1 = 2$ расходится.

Подставив в исходный степенной ряд $x_2 = -2$, получим знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. По признаку Лейбница этот ряд сходится (см. задачу 9), следовательно, и степенной ряд в точке $x_2 = -2$ сходится. Итак, областью сходимости нашего степенного ряда является числовой промежуток [–2; 2).

Отметим, что ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \tag{2.13}$$

где a_n, n =1, 2, 3, … – постоянные числа, называется степенным рядом по степеням двучлена $x - x_0$.

При $x_0 = 0$ ряд (2.13) принимает вид (2.10). Т.к. ряд (2.13) сходится при $|x - x_0| < R$, то его интервал сходимости имеет вид

$$x_0 - R < x < x_0 + R \tag{2.14}$$

Радиус сходимости (2.13) также вычисляется по формулам (2.11) и (2.12).

Сходящиеся степенные ряды обладают рядом замечательных свойств. В частности внутри интервала сходимости их можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

2.3. Ряды Тейлора и Маклорена

<u>Теорема.</u> Если функция $f(x)$ и ее производная всех порядков определены, непрерывны и ограничены на [a; b], а точки x_0 и x принадлежат этому отрезку, то на [a; b] функция $f(x)$ представлена степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{2.15}$$

который называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора (2.15) называется рядом Маклорена и формула (2.15) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \tag{2.16}$$

или в развернутой формуле записи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \tag{2.17}$$

Поскольку основные элементарные функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ удовлетворяют условиям сформулированной выше теоремы на всей числовой прямой, то при любом $x \in R$ имеют место следующие разложения:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. \tag{2.18}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. \tag{2.19}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots. \qquad (2.20)$$

Для $-1<x\le 1$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots. \qquad (2.21)$$

а для $-1<x<1$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n+\dots. \qquad (2.22)$$

Приведенное разложение для приближенного вычисления определенных интегралов, для приближенного вычисления значений функций, для решения дифференциальных уравнений и т.д.

Задача 11. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,5}\ln\left(1+x^2\right)dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Т.к. разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена имеет вид (2.21), то подставляя в это разложение вместо x переменную x^2, получим

$$\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\dots.$$

Используя это разложение и почленно интегрируя, получим:

$$\int\limits_0^{0,5}\ln\left(1+x^2\right)dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\dots\right)dx=$$

$$\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{2\cdot 5}+\frac{x^7}{3\cdot 7}-\frac{x^9}{4\cdot 9}+\dots\right)\right|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^5\cdot 10}+\frac{1}{2^7\cdot 21}-\frac{1}{2^9\cdot 36}+\dots\approx$$

$$\approx\frac{1}{24}-\frac{1}{320}+\frac{1}{3968}-\frac{1}{18432}+\dots\approx\frac{1}{24}-\frac{1}{320}\approx 0{,}039.$$

Т.к. при вычислении интеграла мы получили знакочередующийся числовой ряд, то отбросив при вычислении его сумм все члены, начиная с третьего члена $\frac{1}{3968}$, мы допустили ошибку, не превышающую первого отброшенного члена. Поскольку же $\frac{1}{3968}<0{,}001$, то наш интеграл вычислен с точностью до 0,001.

Задача 12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющему начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Запишем искомое решение $y(x)$ дифференциального уравнения в виде степенного ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots. \tag{2.23}$$

Найдем последовательно $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$. Из начального условия следует, что $y(0)=1$. Непосредственно из дифференциального уравнения находим, что $y'(0) = 0^2 + y^2(0) = 1$. Продифференцировав обе части уравнения, получим $y'' = 2x + 2y \cdot y'$. Отсюда $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Подставляя найденные значения производных в (2.23), получим искомое разложение

$$y(x) = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \dots = 1 + x + x^2 + \dots.$$

3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Предмет теории вероятностей. Случайные события и соотношения между ними

В различных областях практической и научной деятельности некоторые эксперименты (испытания, наблюдения) приходится повторять большое число раз при одинаковых условиях. В каждом таком случае внимание наблюдателя сосредоточено на результате эксперимента, носящем количественный или качественный характер. Часто наших знаний недостаточно для предсказания результата отдельного эксперимента. В этом случае имеют дело со случайным экспериментом. Однако, если случайный эксперимент повторять многократно, то совокупность результатов таких экспериментов подчиняется определенным закономерностям.

Например, при подбрасывании монеты мы не можем заранее предсказать, упадет монета гербом или надписью вверх. Однако известно, что при увеличении числа подбрасываний монеты относительное число выпадений герба стремиться к 0,5.

Закономерности массовых случайных экспериментов изучаются путем построения их математических моделей. Изучение этих моделей и является основной задачей теории вероятностей.

В тех случаях, когда имеет место достаточно точное согласие математической модели с опытными данными, ее можно использовать для практических и научных рекомендаций.

Другим основным понятием теории вероятностей является событие, т.е. любой мыслимый результат эксперимента. Наблюдаемые события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

<u>Достоверным</u> называется событие, которое неизбежно происходит при осуществлении некоторого эксперимента.

<u>Невозможным</u> называется событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении некоторого эксперимента.

<u>Случайным</u> называется событие, которое может произойти, а может и не произойти при осуществлении некоторого эксперимента.

Достоверное событие обычно обозначают буквой E, невозможное буквой O, а случайные прописными буквами A, B, C, или прописными буквами с индексами A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, … .

Рассмотрим основные соотношения между случайными событиями.

1. Если при наступлении события A появляется и событие B, то говорят, что событие A влечет за собой событие B и пишут $A \subset B$.

2. Событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A и B, называется их суммой и обозначается $A+B$

3. Событие, состоящее в совместном появлении обоих событий A и B, называется их произведением и обозначается AB.

Понятие суммы и произведения случайных событий легко распространить на любое конечное число случайных событий.

4. События A и $\overline{A}$ называются противоположными, если $A+\overline{A}=E$ и $A\overline{A}=O$, т.е. если появление любого из них в каждом эксперименте достоверно, а совместное появление невозможно.

5. События A и B называются несовместными, если их совместное появление в одном эксперименте невозможно, т.е. если $AB=O$.

Говорят, что события A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу событий, если в каждом эксперименте обязательно произойдет хотя бы одно из них, т.е. если $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$.

Если при этом события A_1, A_2, …, A_n попарно несовместны, то говорят, что они образуют полную группу попарно несовместных событий.

3.2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности

Одним из основных понятий теории вероятностей является вероятность случайного события. Введем ее классическое определение.

События E_1, E_2, …, E_n, образующие полную группу попарно несовместных равновозможных событий, называются элементарными исходными эксперимента.

Элементарный исход называется благоприятствующим событию A, если его появление влечет за собой появление события A.

Если событие A можно представить в виде

$$A = E_1 + E_2 + \cdots + E_m \ (m \le n), \tag{3.1}$$

то говорят, что событию A благоприятствует m исходов.

Определение (классическое определение вероятности).

Вероятностью события A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n элементарных исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n} \ . \tag{3.2}$$

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(E) = 1 \tag{3.3}$$

2. Вероятность невозможного события равна 0:

$$P(O) = 0 \qquad (3.4)$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1:

$$0 < P(A) < 1 \qquad (3.5)$$

3.3. Элементы комбинаторики

При вычислении вероятности случайного события по формуле (3.2) полезно использовать элементы комбинаторики.

Пусть имеется множество состоящее из n элементов. Любое его подмножество, содержащее m элементов, называется сочетанием из n элементов по m.

Число всех сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n(\mathrm{n}-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \ . \qquad (3.6)$$

Пусть имеется множество, состоящее из элементов. Любое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется <u>размещением</u> из n элементов по m.

Число всех размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \qquad (3.7)$$

Множество называется упорядоченным, если его элементы пронумерованы натуральными числами.

Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n! \qquad (3.8)$$

<u>Задача 1</u>. Набирая номер телефона, студент забыл две последние цифры. Вспомнив, что эти цифры были различны, он набрал их наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

<u>Решение.</u> Две последние цифры можно набрать числом способов, равным числу упорядоченных двухэлементных подмножеств у десятиэлементного множества (множество всех цифр). Следовательно, всего существует $n = A_{10}^2$ элементарных исходов. Событию A (цифры набраны верно) благоприятствует только один исход, т.е. $m = 1$. По формуле (3.2) находим $P(A)$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_{10}^{2}}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}.$$

Задача 2. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Какова вероятность того, что выбранные наугад 3 изделия окажутся годными?

Решение. Поскольку у множества, содержащего 50 элементов, существует C_{50}^{3} трехэлементных подмножеств, то 3 изделия из 50 можно выбрать $n=C_{50}^{3}$ способами. Так как изделия выбираются наугад, то все эти способы выбора равновероятны. Событию A (выбранные наугад 3 изделия годные) благоприятствует $m=C_{45}^{3}$ равновероятных исходов, т.к. именно столько трехэлементных подмножеств существует у 45-элементного множества годных изделий. По формуле (3.2) находим $P(A)$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{45}^{3}}{C_{50}^{3}}=\frac{45\cdot 44\cdot 43}{1\cdot 2\cdot 3}:\frac{50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{45\cdot 44\cdot 43}{50\cdot 49\cdot 48}\approx 0.724.$$

3.4. Основные теоремы вероятностей случайных событий

Наряду с определением для вычисления вероятностей случайных событий можно использовать сформулированные ниже теоремы.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{3.9}$$

Следствие 1. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \tag{3.10}$$

Следствие 2. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{3.11}$$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{3.12}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.13}$$

Для формулировки теорем о вероятности произведения событий вводится понятие условной вероятности, поскольку вероятность некоторых событий может меняться по мере получения информации о протекании эксперимента.

Два события A и B называются зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В противном случае события A и B называются независимыми.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A произошло, называют условной вероятностью события B и обозначают символом $P_A(B)$.

Для независимых событий $P_A(B)=P(B)$.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \tag{3.14}$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{3.15}$$

Последнюю теорему легко обобщить на случай произведения конечного числа событий:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot ...\cdot P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n). \tag{3.16}$$

В частности для независимых в совокупности событий формула (3.16) принимает вид:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n) \tag{3.17}$$

Задача 3. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,6, для второго – 0,2. Найти вероятность следующих событий: A – в мишень попадут оба стрелка; B – в мишень попадет только один стрелок; C – ни один стрелок не попадет в мишень; $Д$ – в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Обозначим события: H_i – i-й стрелок попал в мишень (i=1,2), $\bar{H}_i$ – i-й стрелок не попал в мишень. Тогда события A, B и C можно представить в виде:

$$A=H_1H_2,\; B=H_1\overline{H}_2+\overline{H}_1H_2,\; C=\bar{H}_1\,\bar{H}_2\,. \tag{3.18}$$

Вероятность попадания в мишень каждого из стрелков не зависит от того, попал или нет в мишень другой стрелок. Значит по теореме о вероятности произведения независимых событий и о вероятности суммы несовместных событий из равенств (3.18) получим:

$$P(A)=P(H_1)P(H_2),\; P(B)=P(H_1)P(\bar{H}_2)+P(\bar{H}_1)P(H_2),$$

$P(C) = P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2)$.

Так как по условию задачи $P(H_1) = P_1 = 0{,}6$, $P(H_2) = P_2 = 0{,}8$, то для противоположных событий $P(\bar{H}_1) = q_1 = 1 - p_1 = 0{,}4$, $P(\bar{H}_2) = q_2 = 1 - p_2 = 0{,}2$. Следовательно, $P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$, $P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$, $P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$. Полученный результат можно проконтролировать следующим образом. Так как события A, B и C образуют полную группу попарно несовместных событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1. Действительно, $P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}48 + 0{,}44 + 0{,}08 = 1{,}0$.

Поскольку события D и C противоположные, т.е. $D = \bar{C}$, то $P(D) = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

Вероятность этого события можно найти и другим способом. Поскольку D=A+B, то $P(D) = P(A) = P(B) = 0{,}48 + 0{,}44 = 0{,}92$.

Задача 4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор последовательно один за другим задает 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на предложенные 3 вопроса.

Решение. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что студент знает i-й вопрос (i=1, 2, 3), B – событие, состоящее в том, что студент знает все 3 предложенные вопроса. Тогда $B = A_1 A_2 A_3$. По определению вероятности случайного события получим, что $P(A_1) = \frac{20}{25}$. Если событие A_1 произошло, то у экзаменатора осталось 24 вопроса, из которых студент знает 19. То есть вероятность события A_2 следует вычислять с учетом того, что произошло событие A_1. Поэтому $P_{A_1}(A_2) = \frac{19}{24}$. Аналогично $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{18}{23}$. По формуле (3.16) находим, что $P(B) = P(A_1)P_{A_1}P(A_2)P_{A_1 A_2}P(A_3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0{,}496$.

Следствием сформулированных выше теорем является формула полной вероятности (3.19).

Теорема. Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, … H_n, образующих полную группу. Тогда вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_1}(A) \qquad (3.19)$$

<u>Задача 5.</u> Из двух цехов поступили заготовки для дальнейшей обработки, при чем из первого цеха поступило 2000 заготовок, а из второго – 3000 заготовок. Брак среди заготовок первого цеха составляет 5%, а среди заготовок второго цеха 2%. Найти вероятность того, что наугад взятая для обработки заготовка бракованная.

<u>Решение.</u> Событие A, состоящее в том, что наугад взятая заготовка бракованная, может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий H_1 (деталь изготовлена первым цехом) или H_2 (деталь изготовленная вторым цехом). Учитывая количество изготовленных цехами заготовок получим:

$$P(H_1)=\frac{2000}{2000+3000}=\frac{2}{5},\ P(H_2)=\frac{3000}{2000+3000}=\frac{3}{5}.$$

По условию задачи $P_{H_1}(A)=0{,}05$, $P_{H2}(A)=0{,}02$.

По формуле полной вероятности (3.18) находим вероятность события A:

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)=\frac{2}{5}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}\cdot 0{,}02=0{,}032.$$

Итак, вероятность того, что наугад взятая заготовка бракованная, составляет 3,2.

3.5. Схема испытаний Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо появиться с вероятностью p, либо не появиться с вероятностью q=1-p. В этом случае говорят, что имеет место схема испытаний Бернулли.

Вероятность того, что в описанных n испытаниях событие A появиться ровно k раз ($0\leq k \leq n$), вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=c_n^k p^k q^{n-k} \qquad (3.20)$$

<u>Задача 6.</u> Стрелок производит 5 выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле p=0,8. Найти вероятность того, что будет ровно три попадания.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой Бернулли (3.20). Так как, в нашем случае $n=5, k=3, q=1-0{,}8=0{,}2$, то

$$P_5(3)=c_5^3 0{,}8^3 0{,}2^2=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04=0{,}2048.$$

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n трудно, т.к. формула требует выполнения большого числа арифметических действий. В этих случаях пользуются локальной теоремой Лапласа или формулой Пуассона.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и не близка к нулю или единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появиться в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(k), \qquad (3{,}21)$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Для функции $\varphi(x)$ имеются специальные таблицы (приложение 1).

Задача 7. Вероятность того, что изготовленная деталь бракована $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 деталей бракованных окажется ровно 80.

Решение. Так как по условию задачи $n = 400$, $k = 80$, $p = 0{,}2$ то $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ и $x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$.

По таблицам находим, что $\varphi(0) = 0{,}3989$. Тогда по формуле (3.21) получим $P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}050$.

Если же число испытаний n велико, а вероятность p появления события A мала, то обычно пользуются формулой Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (3.22)$$

где $\lambda = np$.

Задача 8. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность отрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение минуты произойдет отрыв нитей на пяти веретенах.

Решение. По условию $n = 1000$; $p = 0{,}004$; $k = 5$.

Тогда $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$. Искомая вероятность будет

$P_{1000}(4) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563$.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и близка к нулю или единице, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \tag{3.23}$$

где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_o^X e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табличная функция Лапласа (приложение 2).

Задача 9. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна p=0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $n = 400$; k_1=70; k_2=100; p=0,2. Тогда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Учитывая нечетность функции $\Phi(x)$ по таблицам находим, что $\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944$, $\Phi(2{,}5) = -0{,}4938$. По формуле (3.23) получим искомую вероятность:

$$P_{400}(70, 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$
$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

3.6 Случайные величины и способы их задания

Поскольку ряд событий состоит в появлении некоторой величены, значение которой невозможно предсказать заранее, то теория вероятностей изучает такие случайные величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Случайные величины часто обозначают греческими буквами $\xi, \alpha, \zeta ...$, а их возможные значения строчными латинскими x, y, z, … или X_1, X_2, X_3, … .

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретной называют случайную величину, принимающую конечное или бесконечное множество значений, которые можно пронумеровать натуральными числами.

Непрерывной называют случайную величину, принимающую любые значения из некоторого конечного или бесконечного числового промежутка.

Теория вероятностей изучает законы распределения случайных величин.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений.

Это соответствие можно задать таблицей, графически и аналитически. При табличном способе задания дискретной случайной величины в первой строке указывают ее возможные значения, а во второй – их вероятности:

ξ	X_1	X_2	…	X_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Следует иметь ввиду, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Такую таблицу называют также рядом распределения дискретной случайной величины. Данные такой таблицы можно изобразить графически.

Законы распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин можно задать с помощью функций распределения *F(x)*.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция *F(x)*, определяющая вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее *x*:

$$F(x) = P(\xi < x) \tag{3.24}$$

Отметим следующие свойства *F(x)*:

$$0 \le F(x) \le 1$$

F(x) – неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

При решении задач наиболее часто используется следующее свойство *F(x)*:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) \tag{3.25}$$

Задача 10. В денежной лотерее выпущено 100 билетов, причем разыгрывается один выигрыш в 10000 рублей и 10 выигрышей по 5000 рублей. Составить закон распределения случайной величины ξ - возможного выигрыша в лотерее, найти ее функцию распределения и построить ее график.

Решение. Возможные значения случайной величины ξ - это числа 0, 5000, 10000. Найдем вероятность этих значений. Вероятность того, что ξ примет значение, равное 0, будет $P(\xi = 0) = \frac{89}{100} = 0{,}89$, т.к. из ста билетов лотереи 89 без выигрыша. Аналогична формула

$P(\xi = 5000) = \dfrac{10}{100} = 0{,}10$ и $P(\xi = 10000) = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$. Следовательно, закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ	0	5000	10000
p	0,89	0,10	0,01

Найдем функцию распределения *F(x)*. Если $X \le 0$, то *F(x)*=0. Если $0 < X \le 5000$, то *F(x)*=0,89. Если $5000 < X \le 10000$, то *F(x)*= 0,89 + 0,10 = 0,99. Наконец, если X>10000, то *F(x)* = 0,99 + 0,1 = 1,0. Итак

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 0{,}89, & \text{если } 0 < x \le 5000, \\ 0{,}99, & \text{если } 5000 < x \le 10000, \\ 1{,}0, & \text{если } x > 10000. \end{cases}$$

График функции *F(x)* имеет вид:

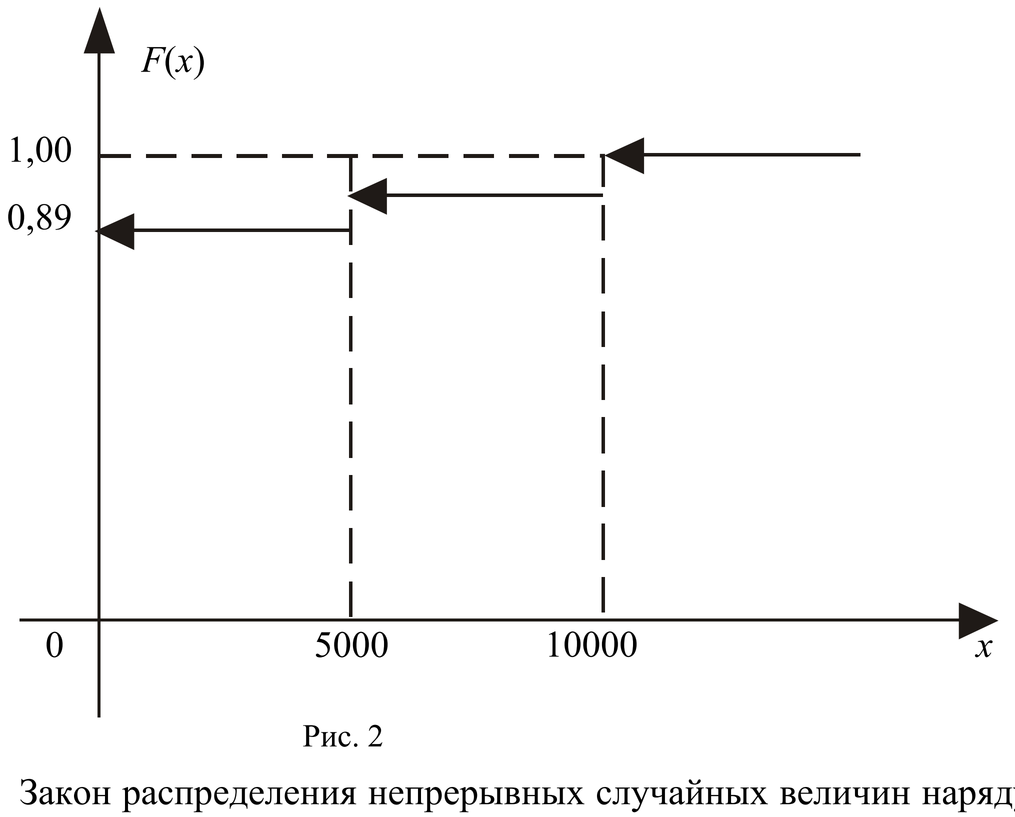

Рис. 2

Закон распределения непрерывных случайных величин наряду с функцией распределения *F(x)* можно задавать плотностью распределения вероятностей *p(x)*.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется функция *p(x)*, такая, что

$$p(x) = F'(x) \tag{3.25}$$

Отметим свойства *p(x)*:

1. $p(x) \geq 0$, т.е. плотность распределения неотрицательна.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

При решении задач часто используется следующее свойство *p(x)*:

$$P(a < \xi < b) = \int\limits_a^b P(x)dx \qquad (3.26)$$

Отсюда вытекает, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} P(t)dt \qquad (3.27)$$

Примечание: функцию распределения *F(x)* называют также интегральной функцией распределения, а плотность распределения вероятностей *p(x)* называют дифференциальной функцией распределения.

3.7. Числовые характеристики случайных величин

К основным характеристикам случайных величин относятся: математическое ожидание - M_ξ, дисперсия - D_ξ, и среднее квадратическое отклонение - σ_ξ.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называют сумму произведений всех ее возможных значений на сумму их вероятности.

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3.28)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ, возможные значения которой принадлежат отрезку [a; b], называют определенный интеграл:

$$M_\xi = \int\limits_a^b xp(x)dx. \qquad (3.29)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx. \qquad (3.30)$$

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно приближенно равно среднему значению случайной величины.

Отклонением случайной величины называют разность $\xi - M_\xi$ между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Дисперсией (рассеиванием) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D_\xi = M_{(\xi - M_\xi)^2} \tag{3.31}$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$$D_\xi = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - M_\xi\right)^2 p_i \,. \tag{3.32}$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия равна

$$D_\xi = \int_a^b \left(x - M_\xi\right)^2 p(x)dx\,, \tag{3.33}$$

если возможные значения принадлежат отрезку [a; b] и

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M_\xi\right)^2 p(x)dx\,, \tag{3.34}$$

если возможные значения принадлежат всей оси Ox.

Однако на практике как правило пользуются другими формулами. Поскольку верно, что формула

$$D_\xi = M(\xi^2) - M_\xi{}^2\,, \tag{3.35}$$

то дисперсия вычисляется по формуле:

$$D_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p_i - M_\xi{}^2 \tag{3.36}$$

для дискретной случайной величины и

$$D_\xi = \int_a^b x^2 p(x)dx - M_\xi{}^2 \tag{3.37}$$

или

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - M_\xi{}^2 \tag{3.38}$$

для непрерывных случайных величин.

Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Средним квадратическим отклонения случайной величины ξ называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}\,. \tag{3.39}$$

Среднее квадратическое отклонение как и дисперсия характеризует степень рассеивания значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Задача 11. Найти M_ξ, D_ξ, σ_ξ дискретной случайной величины ξ, которая задана следующим законом распределения:

ξ	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание M_ξ по формуле (3.28):

$$M_\xi = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$$

Для того, чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения случайной величины ξ^2

ξ^2	4	9	25
З	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание M_{ξ^2}

$$M_{\xi^2} = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3\,.$$

Искомую дисперсию найдем по формуле (3.35)

$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^{\ 2} = 13{,}3 - 3{,}5^2 = 1{,}05$$

Среднее квадратическое отклонение будет:

$$\sigma_\xi = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025\,.$$

Задача 12. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ x,\ 0 < x \le 1, \\ 1,\ x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность вероятности *p(x)*:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ 1,\ 0 < x \le 1, \\ 0,\ x > 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле (3.29):

$$M_\xi = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию по формуле (3.37):

$$D_\xi=\int\limits_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

3.8. Некоторые законы распределения случайных величин

Биноминальный закон распределения.

Если вероятности возможных значений дискретной случайной величины ξ вычисляются по формуле Бернулли $p(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, то распределение называется биноминальным. Числовые характеристики биноминального распределения:

$$M_\xi=np;\ D_\xi=npq;\ \sigma_\xi=\sqrt{npq} \tag{3.40}$$

Распределение Пуассона. Если вероятности возможных значений дискретной случайной величины ξ вычисляются по формуле Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$, то распределение называется распределением Пуассона. Его числовые характеристики:

$$M_\xi=D_\xi=np=\lambda;\ \sigma_\xi=\sqrt{np}. \tag{3.41}$$

Равномерное распределение. Распределение непрерывной случайной величины ξ называется равномерным, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases} \tag{3.42}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{3.43}$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M_\xi=\frac{b+a}{2};\ D_\xi=\frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma_\xi=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{3.44}$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ будет

$$p(\alpha<\xi<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{3.45}$$

Закон показательного распределения. Непрерывная случайная величина называется распределенной по показательному закону, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases},\ \lambda>0 \tag{3.46}$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases} \tag{3.47}$$

Числовые характеристики:

$$M_\xi=\frac{1}{\lambda};\ D_\xi=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma_\xi=\frac{1}{\lambda} \tag{3.48}$$

Вероятность попадания в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ будет

$$p(\alpha<\xi<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \tag{3.50}$$

Закон нормального распределения. Непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.51}$$

где $M_\xi=a$, $D_\xi=\sigma^2$.

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$p(\alpha<\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{3.52}$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания на величину δ равна

$$p(|\xi-M_\xi|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{3.53}$$

Здесь *Ф(х)* – функция Лапласа (функция нечетная *Ф(-х)*=- *Ф(х)*).

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Для нее имеются таблицы значений (приложение 2).

Задача 13. Случайная величина ξ – время работы радиолампы – распределена по показательному закону. Среднее время работы лампы 400 часов. Найти вероятность того, что радиолампа проработает не менее 600 часов.

Решение. По условию $M_\xi = 400$. Для показательного закона распределения $M_\xi = \frac{1}{\lambda} = 400$. Следовательно, $\lambda = \frac{1}{400}$. Искомую вероятность $p(\xi \geq 600)$ будем искать, используя вероятность противоположного события и формулу (3.50):

$$p(\xi \geq 600) = 1 - p(0 \leq \xi < 600) = 1 - \left(e^{-\frac{0}{400}} - e^{-\frac{600}{400}}\right) = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}22.$$

Задача 14. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что ξ примет значение принадлежащее интервалу (20; 50).

Решение. По условию $\alpha = 20$; $\beta = 50$; $a = 30$; $\sigma = 10$. По формуле (3.52) и таблицам приложения 2 получим:

$$p(20 < \xi < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{20-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) =$$
$$= 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

4.1. Функции нескольких переменных

Задачи 1–10. Исследовать функцию $z = z(x, y)$ на экстремум.

1. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y$.
2. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y$.
3. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y$.
4. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y$.
5. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y$.
6. $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y$.
7. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y$.
8. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + x - y$.
9. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y$.
10. $z = -5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y$.

Задачи 11–20. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

11. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$.
12. $z = x^2 y(4 - x - y)$, $\quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le 6$.
13. $z = 3x + y - xy$, $\quad x \ge 0, \quad y \le 4, \quad y \ge x$.
14. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$, $\quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$.
15. $z = x^2 + xy - 3x - y$, $\quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3$.
16. $z = xy - x - 2y$, $\quad x \le 3, \quad y \ge 0, \quad y \le x$.
17. $z = xy - 3x - 2y$, $\quad 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4$.
18. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$, $\quad x \le 1, \quad y \ge 0, \quad y \le x$.
19. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1$.
20. $z = x^2 + xy$, $\quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 3$.

Задачи 21–30. Дана функция $z = z(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти $grad u$ в точке A и производную функции z в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

21. $z = arctg(x^2 y)$, $\quad A(2;1), \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
22. $z = \ln(4x^2 + 5y^2)$, $\quad A(1;1), \quad \vec{a} = 15i - 8\vec{j}$.

23. $z = \arcsin\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, $\quad A(3;1)$, $\quad \vec{a} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$.

24. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $\quad A(5;4)$, $\quad \vec{a} = 8\vec{i} - 15\vec{j}$.

25. $z = 2x^2 + 3xy + 4y$, $\quad A(1;3)$, $\quad \vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

26. $z = arctg\sqrt{xy}$, $\quad A(1;4)$, $\quad \vec{a} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.

27. $z = \ln(x^2 + 2xy + y^2)$, $\quad A(1;1)$, $\quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

28. $z = \arccos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, $\quad A(1;3)$, $\quad \vec{a} = 8\vec{i} + 15j$.

29. $z = \ln\left(1 + \sqrt{xy}\right)$, $\quad A(1;4)$, $\quad \vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

30. $z = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$, $\quad A(1;1)$, $\quad \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Задачи 31–40. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{F}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности векторного поля $\vec{F}$ найти его потенциал.

31. $\vec{F} = (2x + 3yz)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{j} + (2z + 3xy)\vec{k}$.

32. $\vec{F} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k}$.

33. $\vec{F} = (x - 5yz)\vec{i} + (y - 5xz)\vec{j} + (z - 5xy)\vec{k}$.

34. $\vec{F} = (7x + yz)\vec{i} + (7y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$.

35. $\vec{F} = (4x - 3yz)\vec{i} + (4y - 3xz)\vec{j} + (z - 3xy)\vec{k}$.

36. $\vec{F} = (x + 5yz)\vec{i} + (y + 5xz)\vec{j} + (z + 5xy)\vec{k}$.

37. $\vec{F} = (3x + 2yz)\vec{i} + (3y + 2xz)\vec{j} + (3z + 2xy)\vec{k}$.

38. $\vec{F} = (5x - yz)\vec{i} + (5y - xz)\vec{j} + (5z - xy)\vec{k}$.

39. $\vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$.

40. $\vec{F} = (2x - yz)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$.

4.2. Числовые и степенные ряды

Задачи 41–50. Исследовать сходимость числового ряда.

41. *а*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

42. *а*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{7^n}{3^n n!}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

43. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

44. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n+1}{2^n(n+1)!}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

45. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+2}{n4^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

46. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^{n+1}}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

47. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)2^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

48. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^2$.

49. *а*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+2)^2}{n!}$; *б*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^3 n}$.

50. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

Задачи 51–60. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$.

52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{(n+1)!}$.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n!\sqrt{n}}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n5^n x^n$.

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3n+1}$.

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n5^n}$.

Задачи 61–70. Вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно.

61. $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx.$

62. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} dx.$

63. $\int\limits_0^1 x^2 \cos\sqrt{x} dx.$

64. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx.$

65. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx.$

66. $\int\limits_0^{0,5} \frac{xdx}{1+x^3}.$

67. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx.$

68. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx.$

69. $\int\limits_0^1 \sqrt{x} \sin\sqrt{x} dx.$

70. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

Задачи 71–80. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$.

71. $y' = e^{2x} + y, \quad y(0) = 2.$

72. $y' = e^y + xy, \quad y(0) = 1.$

73. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$

74. $y' = \cos x + e^y, \quad y(0) = 1.$

75. $y' = e^{-x} + y^2, \quad y(0) = 2.$

76. $y' = \sin x + xy, \quad y(0) = 1.$

77. $y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1.$

78. $y' = x + y^3, \quad y(0) = 2.$

79. $y' = e^x - y, \quad y(0) = 2.$

80. $y' = x + e^y, \quad y(0) = 0.$

4.3. Теория вероятностей

Задачи 81–90. Решите следующие задачи, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

81. Три стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность попаданий в цель: а) хотя бы одним стрелком; б) двумя стрелками.

82. Набирая номер телефона абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня, что эти цифры различны. Найдите вероятность того, что абонент набрал нужные цифры.

83. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания первый станок 0,9, второй – 0,8, третий – 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа не потребуют внимания: а) ровно два станка; б) хотя бы один станок.

84. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен 0,9, второй – 0,8 и третий – 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) только один экзамен; б) все три экзамена; в) хотя бы один экзамен.

85. Для сигнализации об аварии установлено два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии срабатывает первый сигнализатор равна 0,95, второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор.

86. В урне находятся 10 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу извлекли 4 шара. Найти вероятность, что среди них: а) все белые шары; б) два белых и два черных шара.

87. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе – 0,85 и в третье – 0,8. Найти вероятность того, что два отделения получат газеты вовремя, а одно с опозданием.

88. Для одной бригады вероятность выполнения нормы равна 0,8, для другой – 0,9. Какова вероятность, что: а) обе бригады выполнят норму; б) хотя бы одна бригада выполнит норму.

89. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. После первого попадания стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет произведено ровно 4 выстрела.

90. В первой урне 2 белых и 10 черных шаров, во второй урне – 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова

вероятность того, что : а) оба шара белые; б) один шар белый; в) хотя бы один шар белый.

Задачи 91–100. Решите следующие задачи, используя формулу полной вероятности.

91. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,08 и на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого.

92. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы соответственно равны: 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наугад взятый кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

93. В ящике имеется 5 деталей, изготовленных заводом №1 и 10 деталей, изготовленных заводом №2. Сборщик последовательно вынимает из ящика детали одну за другой. Найти вероятность того, что второй будет извлечена деталь, изготовленная заводом №1.

94. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму, равна для лыжника – 0,8, для велосипедиста 0,9, для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что вызванный наудачу спортсмен выполнит квалификационную норму.

95. В каждой из двух урн находится по 5 белых и 10 черных шаров. Из первой во вторую перекладывают один шар. После чего из второй урны извлекают шар. Найти вероятность того, что он будет белый.

96. Имеется три ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором 50 из них 10 окрашенных; в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь из наугад взятого ящика окажется окрашенной.

97. Заготовки для обработки поступают из трех цехов: 50% из первого, 30% из второго, 20% из третьего. Брак среди заготовок 1 – го цеха составляет 5%, второго цеха 4%, и третьего цеха 2%. Найти вероятность того, что наугад взятая заготовка не бракованная.

98. Имеются две партии одинаковых изделий из 18 и 20 штук. Причем в первой партии два, а во второй три бракованных изделия. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего случайным образом выбирается изделие из второй партии. Найти вероятность того, что выбранное изделие бракованное.

99. Из трамвайного парка в случайном порядке выходят 4 трамвая №1 и 8 трамваем №2. Найти вероятность того, что второй из вышедших на линию трамваев будет иметь №1.

100. В урне было 10 шаров, из них 4 – черных. Из урны два шара забрали. После чего извлекли один шар. Найдите вероятность того, что он черный.

Задачи 101–110. Решите следующие задачи, используя схему Бернулли.

101. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. По мишени производится 7 выстрелов. Найдите вероятность того, что в мишень будет не менее двух попаданий.

102. При установившемся технологическом процессе 60% всех изготовляемых заводом изделий выпускается высшим сортом. Приемщик наугад берет 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий высшего сорта окажется от 120 до 150?

103. Вероятность того, что любой абонент звонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонит 5 абонентов?

104. Вероятность выхода из строя за некоторое время T одного конденсатора равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 100 независимо работающих конденсаторов в течение времени T выйдет из строя не более 20 конденсаторов.

105. Производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8. Найдите вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появиться: а) ровно 90 раз; б) не менее 20 раз.

106. Найдите вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие A появится не менее 5 раз, если в каждом испытании вероятность появления события равна 0,9.

107. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,004. Найдите вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий не выдержат испытания не более двух изделий.

108. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень более 75 раз.

109. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

110. Рабочий обслуживает 10 однотипных станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в течение часа этих требований будет от 3 до 5.

Задачи 111–120. По данному закону распределения случайной величины ξ найдите: а) математическое ожидание M_ξ; б) дисперсию D_ξ; в) среднее квадратическое отклонение σ_ξ; г) $P(\xi < M_\xi)$; д) функцию распределения $F(x)$; е) постройте график $F(x)$

111.

ξ	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

112.

ξ	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

113.

ξ	22	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

114.

ξ	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

115.

ξ	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

116.

ξ	30	32	35	40
p	0,1	0,5	0,2	0,2

117.

ξ	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

118.

ξ	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

119.

ξ	60	64	67	70
p	0,1	0,3	0,4	0,2

120.

ξ	45	47	60	82
p	0,2	0,4	0,1	0,1

Задачи 121–130. Случайная величина ξ задана функцией распределения $F(x)$. Требуется найти: а) плотность распределения $P(x)$ вероятностей случайной величины ξ; б) математическое ожидание M_ξ и дисперсию D_ξ; в) $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$; г) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $P(x)$.

121. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 4, \\ \dfrac{1}{2}x - 2 & \text{при } 4 < x \le 6, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$

121. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{9} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

122. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ x - 1 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

124. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

125. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} & \text{при } -1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$ 126. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ \frac{1}{2}x-1 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$

127. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{1}{5}x & \text{при } 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$ 128. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{4} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$

129. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4} & \text{при } -1<x\le \frac{1}{3},\\ 1 & \text{при } x>1/3.\end{cases}$ 130. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{4} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$

Задачи 131–140. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. Найдите: а) вероятность попадания случайной величины ξ в заданный интервал (α,β); б) $P(\left|\xi - M_\xi\right| < 2\sigma)$.

131. $a=50$; $\sigma=5$; $\alpha=45$; $\beta=52$.

132. $a=20$; $\sigma=3$; $\alpha=17$; $\beta=26$.

133. $a=36$; $\sigma=4$; $\alpha=30$; $\beta=40$.

134. $a=60$; $\sigma=5$; $\alpha=54$; $\beta=70$.

135. $a=48$; $\sigma=4$; $\alpha=45$; $\beta=56$.

136. $a=30$; $\sigma=3$; $\alpha=24$; $\beta=33$.

137. $a=45$; $\sigma=5$; $\alpha=40$; $\beta=48$.

138. $a=35$; $\sigma=4$; $\alpha=27$; $\beta=37$.

139. $a=40$; $\sigma=3$; $\alpha=34$; $\beta=43$.

140. $a=25$; $\sigma=2$; $\alpha=20$; $\beta=27$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

2. Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,8	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888	1,62	0,4474
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732
0,34	0,1331	0,74	0,2704	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767

Продолжение таблицы

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,49865
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,20	0,49931
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,40	0,49966
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,60	0,499841
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,80	0,499928
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	4,00	0,499968
2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	4,50	0,499997
2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	5,00	0,499997
2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979		
2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980		

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике.–Мн., 1991.–480 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.–М.: Наука, 1978.– Т.1.–456 с.; т.2.–576 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.А. Высшая математика в упражнениях и задачах.–М.: Высшая школа, 1980.–Ч.1.–321 с., ч.2.–368 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Наука, 1980.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1974. Ч.II. Гл. X.
6. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. - М.: Наука, 1984.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ………………………………………………………… 3
1. Функции нескольких переменных ………………………….. 4
1.1. Экстремумы функциии нескольких переменных…………. 4
1.2. Наибольшее и наименьшее значения функции ………….. 5
1.3. Элементы теории поля ..…………………………………….. 7
2. Ряды …………………………………………………………… 13
2.1. Числовые ряды ……………………………………….. 13
2.2. Степенные ряды …………………………….………… 18
2.3. Ряды Тейлора и Маклорена ..…………………………… 20
3. Теория вероятностей ……………………………………….. 23
3.1. Предмет теории вероятностей. Случайные события и соотношения между ними ……………………………. 23
3.2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности ……………………………………… 24
3.3. Элементы комбинаторики …………………………………… 25
3.4. Основные теоремы вероятностей случайных событий ……………………………………… 26
3.5. Схема испытаний Бернулли ……………………………… 29
3.6. Случайные величины и способы их задания …..………… 31
3.7. Числовые характеристики случайных величин ………… 34
3.8. Некоторые законы распределения случайных величин ………………………….……………… 37
4. Задачи для контрольных работ ……………………………….. 40
4.1. Функции нескольких переменных ……………………… 40
4.2. Числовые и степенные ряды ……..…………………… 42
4.3. Теория вероятностей …………………………………….. 44
Приложения ….………………….………………………………… 49
Литература ……………………………………………………….. 52
Содержание ………………………………………………………. 53