ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам-заочникам первого курса для выполнения контрольных работ по высшей математике.

В пособии приведены основные теоретические сведения и примеры решения типовых задач. Приведены задания для выполнения контрольных работ по разобранным темам. В пособии также приведена программа по курсу "Высшая математика", охватывающая материал первого курса. В соответствии с этой частью программы написано настоящее пособие, а также предшествующее пособие, изданное в 2001 году.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Итак, если $F'(x)=f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{1.1}$$

При вычислении неопределенных интегралов используют свойства интегралов, таблицу неопределенных интегралов, различные методы интегрирования, а также тождественные преобразования подинтегральной функции.

Свойства неопределенных интегралов.

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$
2. $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где $k = const.$

Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1).$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
5. $\int \sin x dx = \cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\sin\frac{x}{a} + C.$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Задача 1. Вычислить $\int\left(4x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}}\right)dx$.

Решение. Используя свойства и таблицу неопределенных интегралов, получим:

$$\int\left(4x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}}\right)dx =$$

$$=4\int x^3 dx - \int x^{-2}dx + 2\int\frac{dx}{3^2 + x^2} - \int\frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}} =$$

$$= x^4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}arctg\frac{x}{3} - \ln\left|x + \sqrt{25 + x^2}\right| + C .$$

1.2. Вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям

Вычисление интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1.2}$$

называется интегрированием по частям.

Этой формулой пользуются в том случае, когда $\int vdu$ более простой, чем $\int udv$. Этим методом вычисляют интегралы вида $\int P_n(x)\, e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$, $\int P_n(x)\ln\alpha x dx$, -где $P_n(x)-$многочлен $n-$й степени, интегралы от обратных тригонометрических функций и другие.

Задача 2. Вычислить $\int\left(x^2 + 1\right)e^{3x}dx$.

Решение. Положим $u = x^2 + 1$ и $dv = e^{3x}dx$. Тогда $du = \left(x^2+1\right)' dx = 2xdx$, $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим: $\int \left(x^2+1\right) e^{3x}dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx + C$.

Снова полагая $u = x$ и $dv = e^{3x}dx$, то есть $du = dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$, получим

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int \left(x^2+1\right) e^{3x}dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 + 1 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C.$$

1.3. Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной

Вычисление неопределенного интеграла по формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где $x = \varphi(t)$ – монотонная и непрерывно дифференцируемая функция, или по формуле $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$, называется вычислением интеграла методом замены переменной.

Задача 3. Вычислить $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Сделав замену переменной $x = \sin t$, и, учитывая, что $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, $dx = d\sin t = \cos t\,dt$, получим: $\int \sqrt{1-x^2}dx =$

$$== \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t d2t\right) = \frac{t + \sin 2t}{2} + C =$$

$$\frac{\arcsin x + \sin(2\arcsin x)}{2} + C.$$

Задача 4. Вычислить $\int e^{x^2+1}xdx$.

Решение. Полагая $t = x^2 + 1$ и, учитывая, что $dt = 2xdx$ и $xdx = \frac{dt}{2}$, получим: $\int e^{x^2+1}xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{e^t}{2} + C = e^{x^2+1} + C$.

1.4. Интегрирование рациональных функций

Интегрирование рациональных функций $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, представляющих собой отношение двух многочленов соответственно n-ой и m-ой степеней, сводится к ее разложению на простейшие интегрируемые дроби вида $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$, $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, где α, k -- целые положительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. При этом в случае неправильной рациональной функции (то есть при $n \geq m$) предварительно следует выделить целую часть.

Задача 5. Вычислить $\displaystyle\int \frac{3x^2+8x+17}{(x+3)\left(x^2+4x+13\right)}dx$.

Решение. Так как квадратный трехчлен $x^2+4x+13$ не имеет действительных корней, то представим подинтегральную функцию в виде:

$$\frac{3x^2+8x+17}{(x+3)\left(x^2+4x+13\right)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+13}.$$

Отсюда следует, что $A\left(x^2+4x+13\right)+(Bx+C)(x+3)=3x^2+8x+17$, или $Ax^2+4Ax+13A+Bx^2+3Bx+Cx+3C=3x^2+8x+17$, или $(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+13A+3C=3x^2+8x+17$. Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем выражении, получим систему: $\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+3B+C=8, \\ 13A+3C=17. \end{cases}$ Решение этой системы, полученное методом последовательного исключения неизвестных или по формулам Крамера, дает $A=2, B=1, C=-3.$ Итак, $\displaystyle\int \frac{3x^2+8x+17}{(x+3)\left(x^2+4x+13\right)}dx$ $=$ $\displaystyle 2\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{x-3}{x^2+4x+13}dx$. Вычислим эти интегралы. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+3}$ $=$ $\ln|x+3|+C$. Далее $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2+4x+13}dx$ $=$

$$\int\frac{(x+2)-5}{(x+2)^2+9}dx=\left|\begin{matrix} \textit{замена } t=x+2 \\ dt=dx \end{matrix}\right|=\int\frac{t-5}{t^2+9}dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+9}-$$

$$5\int\frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9}-$$

$$\frac{5}{3}arc\,tg\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+9\right)-\frac{5}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-\frac{5}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C$. Окончательно имеем:

$$\int\frac{3x^2+8x+17}{(x+3)\left(x^2+4x+13\right)}dx=$$

$$=2\ln|x+3|-5\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-\frac{5}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C.$$

1.5. Интегрирование простейших иррациональностей

Интегрирование простейших иррациональностей основано на использовании замены переменной, позволяющей избавиться от иррациональности у подинтегральной функции.

Задача 6. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\left|\begin{array}{c}\text{замена}\; x=t^6, \text{тогда}\\ dx=6t^5dt,\sqrt{x}=t^3,\sqrt[3]{x}=t^2\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)}=\;6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\left(t-arc\,tg\,t\right)+C=$$

$$=6\left(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

1.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

При вычислении интегралов от тригонометрических функций вида $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ полезно пользоваться следующим правилом:

1. Если подинтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, то есть $R\left(\sin x,\cos x\right)=-R\left(-\sin x,\cos x\right)$, то следует делать замену $u=\cos x$.

2. Если подинтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, то есть $R\left(\sin x,\cos x\right)=-R\left(\sin x,-\cos x\right)$, то следует делать замену $u=\sin x$.

3. Если подинтегральная функция не изменяет знак при изменении знака у $\sin x$ *и* $\cos x$, то следует делать замену $u=tg\,x$.

Задача 7. Вычислить $\int\sin^3x\cos^2x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = \left| \begin{array}{c} замена\ t = \cos x, \\ dt = -\sin x\,dx \end{array} \right| = -\int \left(1-t^2\right) t^2\,dt =$$

$$= \int \left(t^4 - t^2\right) dt == \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Задача 8. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \left| \begin{array}{c} замена\ t = \sin x, \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right| = \int t^2\left(1-t^2\right) dt =$$

$$\int \left(t^2 - t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Наконец, если подинтегральная функция содержит четные степени синуса или косинуса, то полезно понизить степени этих функций, используя формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \text{или} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Задача 9. Вычислить $\int \sin^4 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \cos 4x\right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определённый интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница

Определённый интеграл определяется как конечный предел интегральной суммы от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Основные свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b dx = b - a$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ b функция $F(x)$ – некоторая ее первообразная, то имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{2.1}$$

Задача 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$.

Решение. Т.к. функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x)\sin x$, то по формуле (2.1) получим: $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$.

2.2. Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям и методом замены переменной

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - vdu \tag{2.2}$$

Вычисление определенного интеграла по формуле (2.2) называется интегрированием по частям.

Задача 2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$.

Решение. Полагая $u = v$, $dv = \cos x dx$, получим $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$. Тогда по формуле (2.2) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx =$

$= \pi\sin\pi - 0\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = 0 - 0 + \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$.

Если функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, а $f(\varphi(t))$ также непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{2.3}$$

Вычисление определенного интеграла по формуле (2.3) называется интегрированием методом замены переменной.

Задача 3. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $x=\sin t$. Тогда $dx=(\sin t)'\,dt=\cos t dt$, $0=\sin 0$ и $1=\sin\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

2.3. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси $0x$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рис. 1), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx, \tag{2.4}$$

а площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, если $f_2(x)\ge f_1(x)$ для $a\le x\le b$, (см. рис. 2) вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx. \tag{2.5}$$

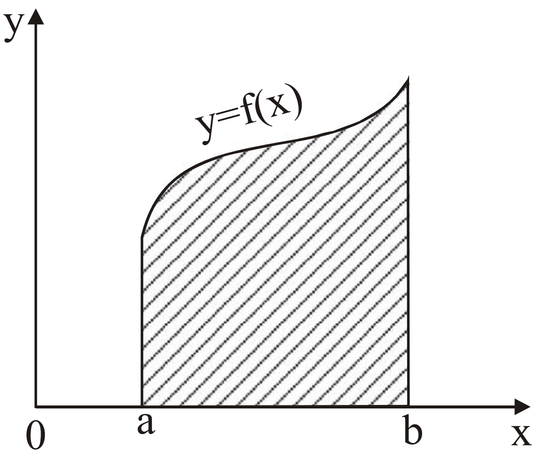

Рис.1.

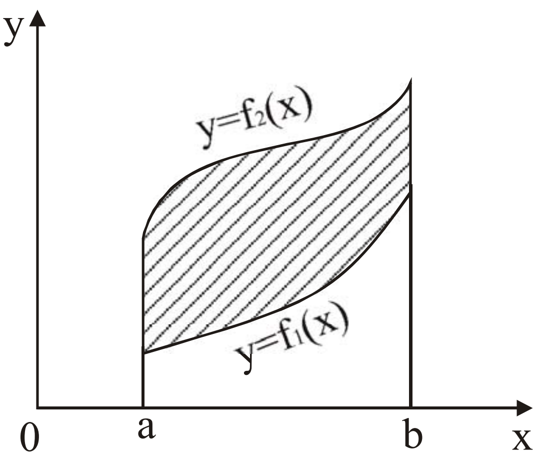

Рис.2.

Площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, а нижней границей является ось $0x$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (2.6)$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β (см. рис. 3), вычисляется по формуле:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (2.7)$$

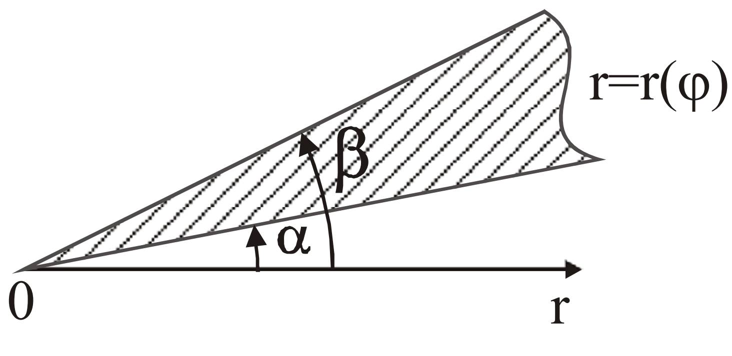

Рис.3.

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения этих парабол, решив систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1, y_1 = 1, \\ x_2 = -1, y_2 = 1. \end{matrix}$$

Изобразим для наглядности эту фигуру на рисунке 4.

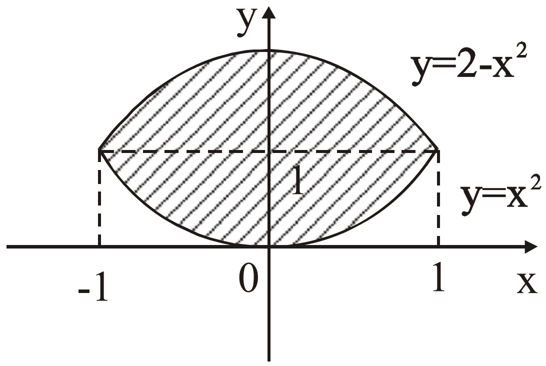

Рис. 4.

По формуле (2.5) вычислим площадь фигуры:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=\left(2x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$2\left(1-\frac{1}{3}\right)-2\left(-1+\frac{1}{3}\right)=2\frac{2}{3}\text{ (кв. ед.)}$$

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение. Т.к. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$, то данные параметрические уравнения описывают эллипс. Вычислим площадь S^* части эллипса, расположенной в первой четверти (см. рис. 5), по формуле (2.6):

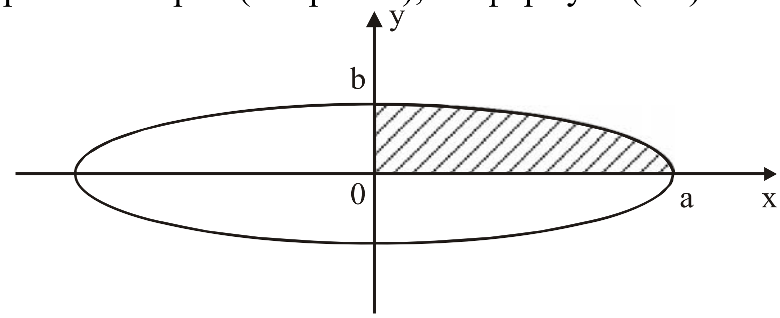

Рис. 5

$$S^*=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t\cdot\left(a\cos t\right)'dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 tdt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

$$\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-0+\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Поэтому площадь эллипса $S=4S^*=\pi ab$ (кв. ед.)

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 1 - \cos\varphi$.

Решение. Т.к. функция $r(\varphi)$ имеет период 2π и определена на всей числовой прямой, то по формуле (2.7) получим:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\cdot 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \text{ (кв. ед.)},$$

т.к. $\sin 2\pi n = 0$, $n \in Z$.

2.4. Применение определенного интеграла для вычисления длин дуг плоских кривых

Длина L кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \tag{2.8}$$

Длина L кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt. \tag{2.9}$$

Длина L кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \tag{2.10}$$

Задача 7. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, если $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Решение. Используем формулу (2.8), преобразовав предварительно подынтегральную функцию:

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\ln'\left(1 - x^2\right)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{\left(1 - x^2\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^2} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Поэтому $L=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=-\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1+2}{x^2-1}dx=-\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=$

$$=-\left(x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=-\left(\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|\right)=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

Задача 8. Вычислить длину дуги кривой $x=t^2$, $y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right)$, $0\le t\le\sqrt{3}$.

Решение. Т.к. кривая задана параметрическими уравнениями, то используем формулу (2.9), преобразовав предварительно подынтегральную функцию: $\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}=\sqrt{\left(\left(t^2\right)'\right)^2+\left(\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)'\right)^2}=$

$$=\sqrt{(2t)^2+\left(t^2-1\right)^2}=\sqrt{4t^2+t^4-2t^2+1}=\sqrt{\left(t^2+1\right)^2}=t^2+1.$$

Поэтому $L=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(t^2+1\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

2.5. Применение определенного интеграла для вычисления объёмов тел вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью $0x$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$V_x=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx. \qquad (2.11)$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=g(y)$, осью $0y$ и двумя прямыми $y=c$ и $y=d$, вычисляется по формуле

$$V_y=\pi\int\limits_c^d x^2(y)dy. \qquad (2.12)$$

Задача 9. вывести формулу для вычисления объема шара радиуса R.

Решение. Поскольку объем шара радиуса R равен объему тела вращения окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси $0x$, то по формуле (2.11) получим:

$$V = \int\limits_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. ед.)}$$

2.6. Несобственные интегралы

Пусть функция $f(x)$ определена на луче $[a;+\infty]$ и интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $a < b < +\infty$. Тогда несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty]$ определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \tag{2.12}$$

Если этот предел существует и является конечным, то несобственный интеграл (2.12) называется сходящимся, если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимися.

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{a} f(x)dx \tag{2.13}$$

и $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int\limits_{-b}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx. \tag{2.14}$$

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном полуинтервале $[a;b)$ и неограниченна на нем, причем она ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a;\varepsilon)$, где $a < \varepsilon < b$. Тогда несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to b-0}\int\limits_{a}^{\varepsilon} f(x)dx. \tag{2.15}$$

Если этот предел существует и является конечным, то несобственный интеграл (2.15) называется сходящим, если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимся.

Аналогично определяется несобственные интегралы от функций с особенностью в точке a и b точке c, если $a < c < b$.

Задача 10. вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ (или доказать его расходимость).

Решение. Используем формулу (2.12):

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{b}\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Задача 11. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (или доказать его расходимость).

Решение. Т.к. подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ неограниченна при $x \to 1-0$, то используем формулу (2.15):

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 1-0}\int_0^\varepsilon \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 1-0}\left(\left.\frac{-1}{x-1}\right|_0^\varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1-0}\left(\frac{-1}{\varepsilon-1} - 1\right) = \frac{-1}{-0} - 1 = +\infty.$$

Итак, несобственный интеграл расходится.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-ГО И 2-ГО РОДА

Криволинейный интеграл 1-го рода от функции $f(x, y)$ по кривой c определяется как конечный предел соответствующей интегральной суммы и обозначается

$$\int_c f(x,y)\,ds. \tag{3.1}$$

Если $f(x, y) \equiv 1$ на кривой c, то интеграл (3.1) численно равен длине кривой c.

Криволинейные интегралы 2-го рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по кривой c также определяются как конечные пределы соответствующих интегральных сумм и обозначаются

$$\int_c P(x,y)\,dx, \int_c Q(x,y)\,dy \tag{3.2}$$

$$\int_c P(x,y)\,dx + \int_c Q(x,y)\,dy \tag{3.3}$$

Общий криволинейный интеграл 2-го рода вида (3.3) численно равен работе, производимой силой $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\cdot \vec{i} + Q(x, y)\cdot \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой c.

Если кривая c является графиком функции $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то криволинейные интегралы вычисляются их сведениям к определенным интегралам по формулам

$$\int\limits_c f(x,y)ds=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad (3.4)$$

$$\int\limits_c P(x,y)dx+\int\limits_c Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(x,y(x))+y'(x)Q(x,y(x)))dx. \qquad (3.5)$$

Если кривая c задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то криволинейные интегралы вычисляются сведением к определенным интегралам по формулам

$$\int\limits_c f(x,y)ds=\int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt, \qquad (3.6)$$

$$\int\limits_c P(x,y)dx+\int\limits_c Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)+Q(\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t))\boldsymbol{\psi}'(t))dt. \qquad (3.7)$$

Задача 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_c y^2ds$, где c – часть окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Т. к. кривая c, задана параметрическими уравнениями, то для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода используем формулу (3.6):

$$\int\limits_c y^2ds=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t)^2\cdot\sqrt{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\,dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{a^3}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^3}{4}.$$

Задача 2. Вычислить работу A, производимую силой $\vec{F}(x,y)=\left(xy-x^2\right)\vec{i}+x\,\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги параболы $y=2x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;3)$.

Решение. Вычислим работу A с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по формуле (3.5), учитывая, что $P(x,y)=xy-x^2$, $Q(x,y)=x$:

$$A=\int_c \left(xy-x^2\right)dx+xdy=\int_0^1\left(x\cdot 2x^2-x^2+x\left(2x^2\right)'\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3+3x^2\right)dx=\left(2\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

4. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Двойные интегралы и их вычисление в декартовых и полярных координатах

Двойной интеграл определяется как конечный предел интегральной суммы от функции $f(x,y)$ по двумерной области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Если область D ограничена прямыми $x=a, x=b$ и графиками функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причём $\varphi_2(x)\ge\varphi_1(x)$ при $x\in[a,b]$ (см. рис. 4.1), то двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (4.1)$$

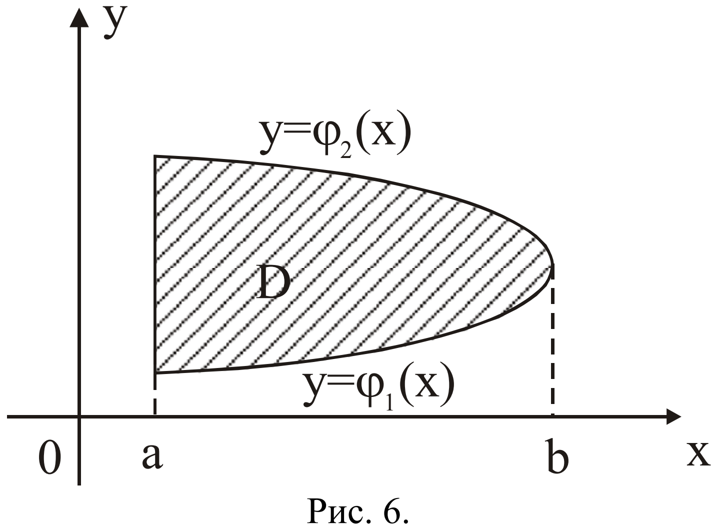

Рис. 6.

Стоящий в правой части (4.1) интеграл называется повторным интегралом и вычисляется следующим образом. Сначала вычисляют интеграл по переменной y от функции $f(x,y)$, считая при этом, что $x=const$. Получившуюся в результате функцию $f(x)$ интегрируют по переменной x и в итоге получают число, которое равно искомому двойному интегралу.

Если область D ограничена прямыми $y = c,\ y = d$ и графиками функций $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причём $\psi_2(y) \geq \psi_1(y)$ при $y \in [c, d]$ (см. рис. 7), то двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{4.2}$$

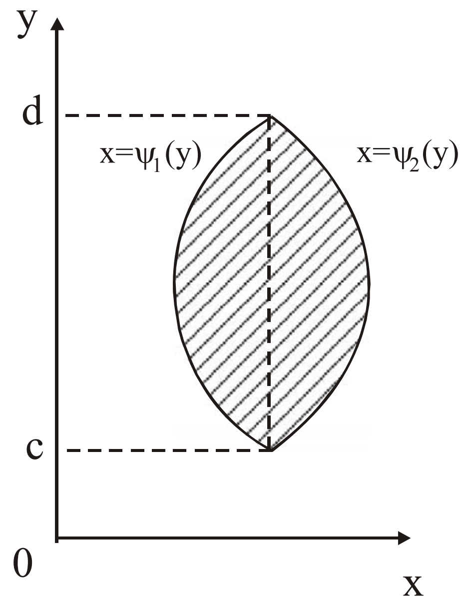

Рис. 7

При этом сначала вычисляют интеграл по переменной x от функции $f(x, y)$, считая что $y = const$, затем получившуюся функцию $f(y)$ интегрируют по переменной y и в результате получают число, которое равно искомому двойному интегралу.

Задача 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = x + y$ по области D, ограниченной прямыми $x = 0,\ y = x$ и $y = 1$.

Решение. Изобразим область D (см. рис. 8).

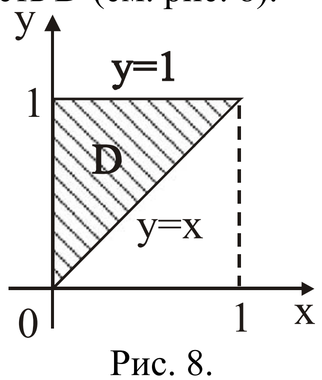

Рис. 8.

В соответствии с формулой (4.1) получим

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x \cdot 1 + \frac{1^2}{2} - x \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + x - \frac{3x^2}{2} \right) dx =$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Данный двойной интеграл можно вычислить и по формуле (4.2), описав область D так, как показано на рис. 9.

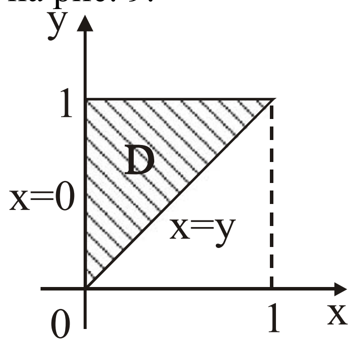

Рис. 9.

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y (x+y)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Bigg|_0^y dy =$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy = \int\limits_0^1 \frac{3y^2}{2} dy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Примечание. Переход при вычислении двойного интеграла от расстановки пределов интегрирования по формуле (4.1) к расстановке пределов по формуле (4.2) называется изменением порядка интегрирования.

При переходе от декартовых координат x и y к полярным r и φ по формулам $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ двойной интеграл преобразуется по формулам

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi, \qquad (4.3)$$

причём стоящий в правой части (4.3) интеграл также вычисляется сведением к повторному:

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\phi_1(\varphi)}^{\phi_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (4.4)$$

При этом предполагается, что область интегрирования D ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$. Внутренняя часть области D ограничена заданной в полярной системе координат кривой $r = \phi_1(\varphi)$, а внешняя – кривой $r = \phi_2(\varphi)$ (см. рис. 10).

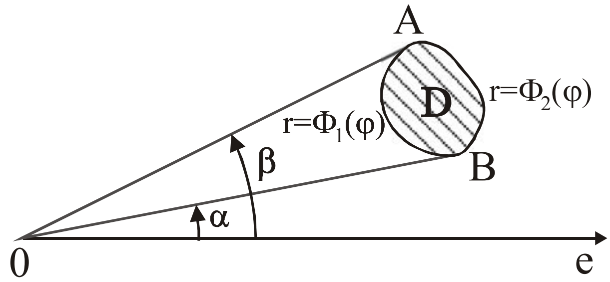

Рис. 10.

Задача 2. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, где D – четверть круга радиуса $R = 3$, лежащая в 1-м квадранте.

Решение. Изобразим область D:

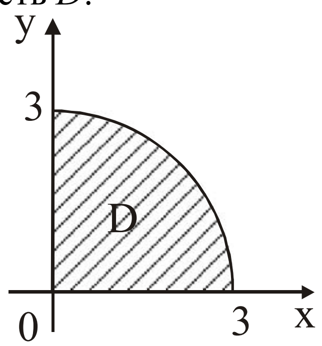

Рис. 11.

Границу области D и подинтегральную функцию удобнее выразить в полярных координатах, поэтому переходим к полярным координатам и вычисляем данный интеграл по формуле (4.4):

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,rdrd\varphi = \iint\limits_D r^2 drd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 r^2 dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left. \frac{r^3}{3} \right|_0^3 \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9 d\varphi = \frac{9\pi}{2}.$$

Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определённого интеграла. *В* частности двойной интеграл по области D от единичной функции равен мере области D, т.е. её площади:

$$\iint\limits_D 1 \cdot dxdy = S_D. \qquad (4.5)$$

4.2. Тройные интегралы и их вычисление в декартовых и цилиндрических координатах

Тройной интеграл определяется как конечный предел интегральной суммы от функции $f(x,y,z)$ по трехмерной области V и обозначается $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$. Если $f(x,y,z)\equiv 1$, то тройной интеграл равен объёму области V.

Если область V снизу ограничена поверхностью $z=\psi_1(x,y)$, сверху - поверхностью $z=\psi_2(x,y)$, а проекция этой области на плоскость $x0y$ есть область D, ограниченная прямыми $x=a, x=b$ и графиками функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причём $\varphi_2(x)\ge\varphi_1(x)$ при $x\in[a,b]$ (см. рис. 12), то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (4.5)$$

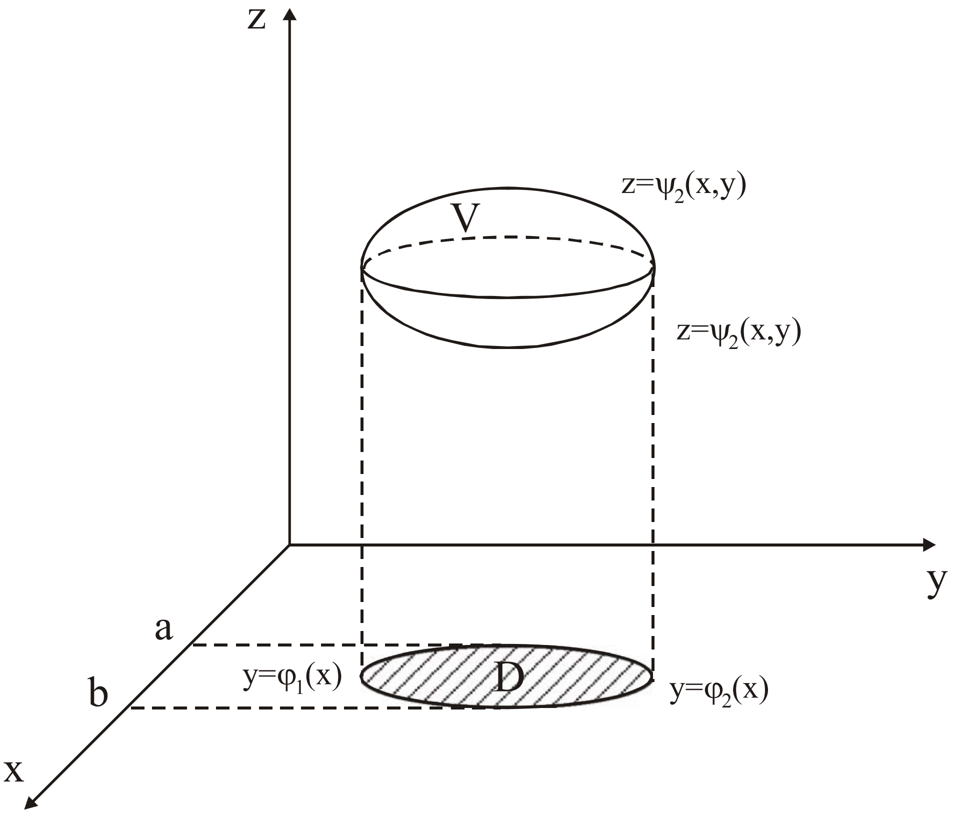

Рис.12.

В тройном интеграле сначала вычисляют интеграл по переменной z, считая x и y постоянными. Таким образом, тройной интеграл сводит к двойному и затем можно интегрировать по переменной, считая x постоянной, наконец интеграл по переменной x. Получившееся число и есть искомый тройной интеграл.

Задача 4. Вычислить $\iiint\limits_V xf(x,y,z)dxdydz$, где V – область, ограниченная плоскостями $x=1,\quad y=2x,\quad z=0\quad и\quad x+y+z=4$.

Решение. Область V – это усечённая призма, изображённая на рис. 4.7. Проекция этой призмы на плоскость *x0y* – это треугольник, изображённый на рис. 4.8.

В соответствии с формулой (4.5) получим:

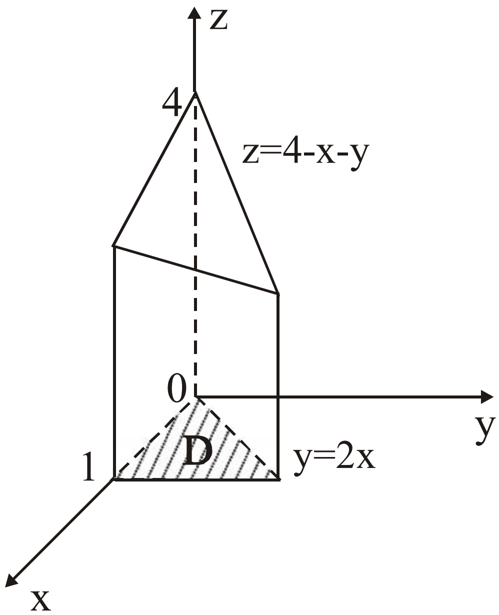

Рис. 13.

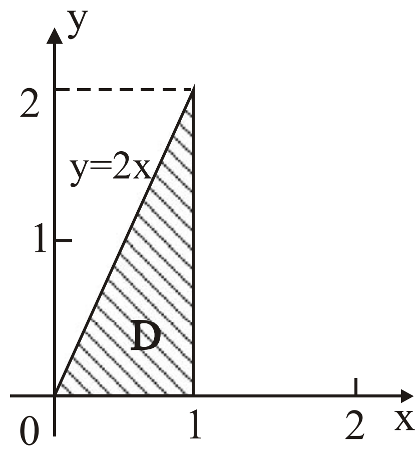

Рис. 14.

$$\iiint\limits_V xf(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}dy\int\limits_0^{4-x-y}xdz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}\left(xz\Big|_0^{4-x-z}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}\left(x(4-x)-xy\big|\right)dy=\int\limits_0^1\left(x(4-x)y-x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2x}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x(4-x)2x-x2x^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(8x^2-4x^3\right)dx=\left(\frac{8x^3}{3}-x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}.$$

При переходе от прямоугольных декартовых координат x,y,z к цилиндрическим координатам r,φ,z, связанным с декартовыми координатами формулами

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z\ \left(0\le r<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<r<+\infty\right)\qquad(4.6)$$

тройной интеграл преобразуется следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz \qquad (4.7)$$

Вычисление стоящего в правой части (4.7) интеграла осуществляется путём его сведения к повторному интегралу в цилиндрических координатах.

Задача 5. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 9$.

Решение. Изобразим тело, ограниченное эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 9$, перпендикулярной оси *0z* (см. рис. 15).

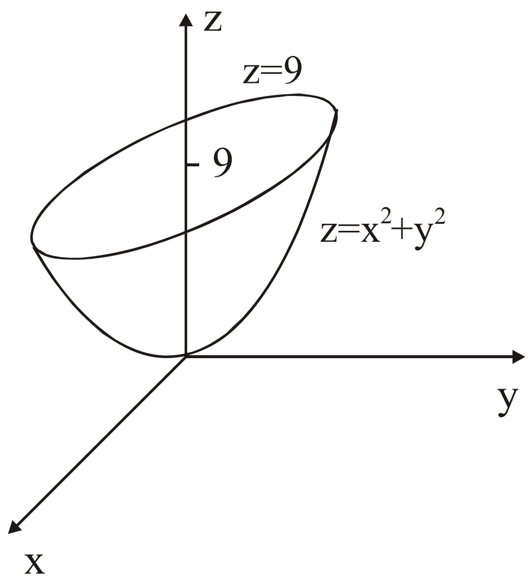

Рис. 15.

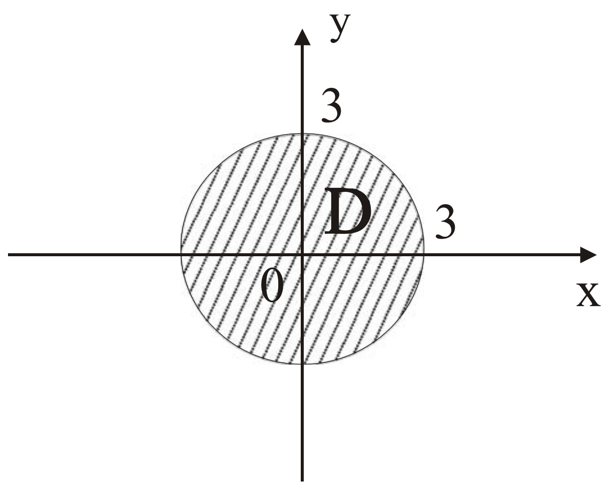

Рис. 16

Проекция этого тела на плоскость $x0y$ – это круг радиуса $R = 3$ (см. рис. 16), т.к. линией пересечения данных поверхностей является окружность $x^2 + y^2 = 3^2$, лежащая в плоскости $z = 9$

Учитывая, что уравнение эллиптического параболоида в цилиндрических координатах имеет вид $z = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, а для круга *D* $0 \le \varphi < 2\pi$ и $0 \le r \le 3$, вычислим объём тела с помощью тройного интеграла в цилиндрических координатах:

$$\iiint\limits_V 1\cdot dxdydz = \iiint\limits_V rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 dr \int\limits_0^{r^2} rdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(rz\Big|_0^{r^2} \right) dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r^3 dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^3 \right) d\varphi = \frac{81}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4}2\pi = \frac{81\pi}{2} \text{ (куб. ед.).}$$

5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, однородных и линейных

Уравнение вида $y' = f(x, y)$, где x-независимая переменная, y и y'– искомая функция и ее производная, называется обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенном относительно производной.

Общим решением этого уравнения называется функция $y' = y(x, c)$, зависящая от произвольной постоянной c, обращающая уравнение в тождество при любом значении с. При этом равенство $y = y(x, c)$ должно быть разрешено относительно c. Решение, полученное из общего решения при конкретном значении $c = c_0$ называется частным решением дифференциального уравнения.

В приложениях важное значение имеет задача выделения из общего решения частного решения, удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0 . \tag{5.1}$$

Такая задача называется задачей Коши, условие (5.1) – начальным условием, а числа x_0 и y_0 – начальными данными.

Рассмотрим решение различных типов дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{5.2}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Если $f_2(y) \neq 0$, то, разделив переменные в (5.2) и проинтегрировав обе части равенства получим общее решение: $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx$, $\displaystyle\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx + c$.

Задача 1. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Решение. Разделив переменные в уравнении $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$, получим $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$. Поэтому

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|c|$, т.е. $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$, $\ln|y| = \ln|cx|$. Итак, $y = cx$– искомое общее решение. Решение $y = 0$ получается из формулы общего решения при $c = 0$.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3}$$

называется однородным уравнением 1-го порядка. Для решения этого уравнения вводят новую функцию $u(x)=\dfrac{y(x)}{x}$. Тогда $y=u\cdot x$, $y'=u'x+u$, и уравнение (5.3) принимает вид $u'x+u=f(u)$. Разделяя переменные в этом уравнении, последовательно получим: $x\dfrac{dy}{dx}=f(u)-u$, $\int\dfrac{du}{f(u)-u}=\int\dfrac{dx}{x}+c$.

Перейдя после интегрирования к функции $y(x)$, получим общее решение исходного уравнения.

Задача 2. Решить уравнение $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на x получим, $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$. Т.к. это однородное уравнение, то введем функцию $u=\dfrac{y}{x}$. Тогда $y'=u'x+u$ и исходное уравнение примет вид $u'x+u=u\ln u$, откуда $x\dfrac{du}{dx}=u(\ln u-1)$, $\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$. Проинтегрировав обе части последнего соотношения, получим: $\int\dfrac{dx}{x}+\ln|c|=\int\dfrac{du}{u(\ln u-1)}$, $\ln|x|+\ln|c|=\int\dfrac{d(\ln u)}{\ln u-1}$,

$\ln|cx|=\int\dfrac{d(\ln u-1)}{\ln u-1}=\ln|\ln u-1|$. Итак, $cx=\ln u-1$, или $cx+1=\ln\dfrac{y}{x}$ – искомое решение уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'+p(x)\cdot y=q(x), \tag{5.4}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ заданные непрерывные функции от переменной *x*, называется линейным уравнением 1-го порядка.

Решение этого уравнения ищут в виде $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y'=u'v+v'u$ и (5.4) принимает $u'v+uv'+p(x)\cdot uv=q(x)$, или $u'v+u(v'+p(x)\cdot u)=q(x)$. Функцию $v(x)$ находят из условия $u'v=q(x)$.

Задача 3. Найти частное решение уравнения $y'+2xy=xe^{-x^2}$, удовлетворяющее начальному решению $y(0)=1$.

Решение. Отыскивая решение данного линейного дифференциального уравнения в виде $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, и, учитывая, что $y'=u'v'+uv'$, получим: $u'v+u(v'+2xv)=xe^{-x^2}$. Найдем $u(x)$ из условия $v'+2xv=0$. Получим $\dfrac{dv}{dx}=-2xv$, $\int\dfrac{dv}{v}=-\int 2xdx$, $\ln|u|=-x^2$, $u(x)=e^{-x^2}$. Далее найдем $u(x)$ из условия $u'\cdot e^{-x^2}=x\cdot e^{-x^2}$. Получим $u'=x$, $du=xdx$, $u=\int xdx+c$, т.е. $u(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$.

Следовательно, $y(x)=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – общее решение исходного уравнения. Подставляя в общее решение $x=0$ и $y(0)=1$, получим: $1=(0+c)\cdot 1$ т.е. $c=1$. Следовательно, $y(x)=\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – искомое частное решение уравнения.

5.2. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающих понижение порядка

Уравнения вида

$$y''=f(x) \tag{5.5}$$

решают последовательным интегрированием.

Поскольку $y'(x)=\int f(x)dx+c_1$, то $y(x)=\int\left(\int f(x)dx+c_1\right)dx+c_2$.

Уравнения вида

$$y''=f(x,y'), \tag{5.6}$$

т.е. уравнения, не содержащие искомую функцию $y(x)$ в явном виде, решают путем замены $y'=z(x)$. Тогда $y''=z'(x)$ и уравнения (5.6) принимают вид $z'=f(x,z(x))$.

Уравнения вида

$$y''=f(y,y'), \tag{5.7}$$

т.е. уравнения, не содержащие в явном виде независимую переменную *x*, решают путем замены $y'=p(y)$. Тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$ и уравнение (5.7) принимает вид $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$.

Задача 4. Найти общее решение уравнения $y''=\cos x$.

Решение. Т.к. уравнение имеет вид (5.5), то, проинтегрировав обе его части, получим $y'=\int\cos x dx+c_1=\sin x+c_1$. Проинтегрировав последнее уравнение найдем искомое общее решение: $y=\int(\sin x+c_1)dx+c_2$, т.е. $y(x)=-\cos x+c_1x+c_2$.

Задача 5. Найти общее решение уравнения $2xy''=y'$.

Решение. Т.к. уравнение имеет вид (5.6), то, сделав замену $y'=z(x)$, получим $y''=z'(x)$, и $2xz'(x)=z(x)$, или $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{2x}$. Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим $\int\frac{dz}{z}+\ln|c_1|=\frac{1}{2}\ln|x|$, т.е. имеем

$\ln|z|+\ln|c_1|=\ln\left|\sqrt{x}\right|$, т.е. $c_1 z=\sqrt{x}$. Отсюда $c_1\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$, или $\int c_1 dy=\int\sqrt{x}dx+c_2$, т.е. $c_1\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$, т.е. $y(x)=\dfrac{2}{3\,c_1}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{c_2}{c_1}$. Обозначив $c_1^*=\dfrac{2}{3c_1}$, $c_2^*=\dfrac{c_2}{c_1}$, окончательно получим $y(x)=c_1^* x^{\frac{3}{2}}+c_2^*$. $y(x)=c_1^* x^{\frac{3}{2}}+c_2^*$

Задача 6. Найти частное решение уравнения $y\cdot y''=(y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение. Т.к. уравнение имеет вид (5.7), то, сделав замену $y'=p(y)$, получим $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, $y\cdot p\dfrac{dp}{dy}=p^2$, $p\left(y\dfrac{dp}{dy}-p\right)=0$. Отсюда следует, что либо $p=0$, т.е. $y'=0$, что не удовлетворяет начальным данным, либо $y\dfrac{dp}{dy}-p=0$.

Разделив переменные в последнем уравнении и проинтегрировав, последовательно получим $y\dfrac{dp}{dy}=p$, $\int\dfrac{dp}{p}=\int\dfrac{dy}{y}+\ln|c_1|$, $\ln|p|=\ln|y|+\ln|c_1|$, $\ln|p|=\ln|c_1 y|$, $p=c_1 y$ или $y'(x)=c_1 y(x)$. При $x=0$ последнее равенство с учетом начальных данных принимает вид $3=c_1\cdot 1$, т.е. $c_1=3$. Поэтому $y'(x)=3\cdot y(x)$, или $\int\dfrac{dy}{y}=3\int dx+c_2$, $\ln|y|=3x+c_2$, т.е. $y(x)=e^{3x+c_2}$. Используя начальное условие, найдем c_2: $y(0)=e^{0+c_2}$, $1=e^{c_2}$, т.е. $c_2=0$. Итак, $y(x)=e^{3x}$ – искомое частное решение.

5.3. Решение линейных дифференциальных уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части

Уравнение вида

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=f(x), \tag{5.8}$$

где p и q – постоянные, $f(x)$ – определенная на некотором интервале функция, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (5.8) называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

Общее решение уравнения (5.8) есть сумма общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения y^* исходного неоднородного уравнения , т.е.

$$y=\bar{y}+y^{*}. \qquad (5.9)$$

Для нахождения общего решения $\bar{y}(x)$ однородного уравнения $y''+py'+qy=0$ следует составить характеристическое уравнение $\lambda^2+p\lambda+q=0$ и решить его. Вид общего решения $\bar{y}(x)$ определяется корнями характеристического уравнения λ_1 и λ_2.

1. Если λ_1 и λ_2 действительные и разные, т.е. $\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$\bar{y}(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}. \qquad (5.10)$$

2. Если λ_1 и λ_2 действительные и одинаковые, т.е. $\lambda_1=\lambda_2$, то

$$\bar{y}(x)=(c_1+c_2x)\,e^{\lambda_1 x}. \qquad (5.11)$$

3. Если λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные числа, т.е. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, где $i=\sqrt{-1}$, то

$$\bar{y}(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x). \qquad (5.12)$$

Задача 7. Найти общее решение уравнения $y''-5y'+6y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2-5\lambda+6=0$ и решим его: $\lambda_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}$, т.е. $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$. По формуле (5.10) записываем искомое решение: $\bar{y}(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}$.

Задача 8. Найти общее решение уравнения $y''+6y'+9y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+6\lambda+9=0$ и решим его: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot9}}{2}=\dfrac{-6\pm0}{2}$, т.е. $\lambda_1=\lambda_2=-3$.

По формуле (5.11) записываем искомое решение

$$\bar{y}(x)=(c_1+c_2x)e^{-3x}.$$

Задача 9. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+29y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+29=0$ и решим его:

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot29}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-100}}{2}=\dfrac{-4\pm10\cdot\sqrt{-1}}{2}=-2\pm5\cdot i$. По формуле (5.12) записываем искомое решение: $\bar{y}(x)=e^{-2x}(c_1\cos5x+c_2\sin5x)$.

Метод отыскания частного решения $y^{*}(x)$ уравнение (5.8) рассмотрим для двух специальных видов $f(x)$.

1. Пусть $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*, т.е. пусть уравнение (5.8) имеет вид

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{ax}. \qquad (5.12)$$

Тогда если число a совпадает с k корнями (k=0,1,2) характеристического уравнения

$\lambda^2+p\lambda+q=0$, то частное решение y^* уравнения (5.12) следует искать в виде

$$y^*=x^k\cdot Q_n(x)e^{ax}, \qquad (5.13)$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$.

При этом коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ отыскиваются путем подстановки y^* в уравнение (5.12) с последующим сокращением обеих частей уравнения на $e^{\alpha x}$, приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях и решением получившейся системы. Это метод нахождения y^* называется методом неопределенных коэффициентов.

Примечание 1. Если $f(x)=P_n(x)$, то следует проверять, совпадает ли число $a=0$ с корнями характеристического уравнения.

Примечание 2. Если $f(x)=e^{ax}$, $P_n(x)=P_0(x)=1$, и в этом случае $Q_n(x)=Q_0(x)=A$, где $A=const$.

2. Пусть $f(x)=m\cos bx+n\sin bx$, т.е. пусть уравнение (5.8) имеет вид

$$y''+py'+qy=m\cos bx+n\sin bx. \qquad (5.14)$$

Тогда если число b_i совпадает с k корнями (k=0, 1) характеристического уравнения $\lambda^2+p\lambda+q=0$, то частное решение y^* уравнения (5.14) следует искать в виде

$$y^*=x^k(M\cos bx+N\sin bx). \qquad (5.15)$$

При этом неопределенные коэффициенты M и N отыскиваются путем подстановки y^* в уравнение (5.14) с последующим приравниванием коэффициентов при $\cos bx$ и $\sin bx$ и решением получившейся системы.

Примечание 2.1. Если $f(x)=m\cos bx$ или $f(x)=n\sin bx$, y^* все равно следует искать в общем виде (5.15), т.е. и с $\cos bx$, и с $\sin bx$.

Задача 10. Найти общее решение уравнения $y''-7y'+6y=(x-2)\cdot e^{3x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ однородного уравнения $y''-7y'+6y=0$.

Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2-7\lambda+6=0$ и решим его: $\lambda_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6}}{2}=\dfrac{7\pm 5}{2}$, т.е. $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$. В соответствии с формулой (5.10) $\bar{y}(x)=c_1e^{6x}+c_2e^x$.

Найдем далее y^* – какое-нибудь частное решение исходного уравнения. Поскольку число a=3 не совпадает с корнями характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (5.13) будем искать y^* в виде $y^* = (Ax+B)e^{3x}$. Тогда $\left(y^*\right)' = Ae^x + 3(Ax+B)e^{3x} = (3Ax+A+3B)e^{3x}$,

$\left(y^*\right)'' = 3Ae^{3x} + 3(3Ax+A+3B)e^{3x} = (9Ax+6A+9B)e^{3x}$.

Подставляя y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение и сокращая обе части уравнения на e^{3x}, получим $9Ax+6A+9B-7(3Ax+A+3B)+6(Ax+B) = x-2$

т.е. $-6Ax - A - 6B = x-2$.

Приравняв коэффициенты, стоящие в обеих частях последнего равенства при одинаковых степенях *x*, получим систему уравнений

$\begin{cases} -6A = 1 \\ -A-6B = -2 \end{cases}$. Решив ее, найдем *A* и *B*: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{11}{36}$.

Итак, $y^* = \left(-\frac{x}{6} + \frac{11}{36}\right)\cdot e^{3x}$. Значит $y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{11}{6} - x\right)\cdot e^{3x}$

– общее решение исходного уравнения.

Задача 11. Найти общее решение уравнения $y''+2y'+5y = 2\cos x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ однородного уравнения $y''+2y'+5y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ и решим его: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2-5} = -1 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = -1 \pm 2i$. В соответствии с формулой (5.12)

$$\bar{y}(x) = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Найдем далее y^* – какое-нибудь частное решение исходного уравнения. Поскольку число $1\cdot i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (5.15) будем искать y^* в виде $y^* = M\cos x + N\sin x$.

$$\left(y^*\right)' = -M\sin x + N\cos x,\ y^{*''} = -M\cos x - N\sin x.$$

Подставляя y^*, $\left(y^*\right)'$ и $y^{*''}$ в исходное уравнение, получим

$-M\cos x - N\sin x + 2(-M\sin x + N\cos x) + 5(M\cos x + N\sin x) = 2\cos x$

или $(4M+2N)\cos x + (-2M+4N)\sin x = 2\cos x$.

Приравняв коэффициенты, стоящие в обеих частях последнего равенства при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему уравнений.

$\begin{cases} 4M+2N = 2 \\ -2M+4N = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2M+N = 1 \\ M = 2N \end{cases}$.

Решив ее, найдем M и N: $M=\frac{2}{5}$, $N=\frac{1}{5}$. Итак, $y^*=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$, значит $y=\bar{y}+y^*=e^{-x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$ – общее решение исходного уравнения.

5.4. Решение систем дифференциальных уравнений

Совокупность соотношений вида

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}, \tag{5.16}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – функция независимой переменной t, a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ – числа, называется линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Общим решением системы (5.16) называется совокупность двух функций

$$x=x(t,c_1,c_2),\ y=y(t,c_1,c_2), \tag{5.17}$$

содержащих две произвольные постоянные c_1 и c_2, обращающих оба уравнения системы в тождества при любых значениях c_1 и c_2.

Решение, получающееся из общего при подстановке конкретных числовых значений произвольных постоянных, называется частным решением.

Задача нахождения решения системы (5.16), удовлетворяющего условиям

$$x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0, \tag{5.18}$$

где t_0, x_0, y_0 – заданные числа, называется задачей Коши для системы (5.16).

Один из способов решения системы (5.16) состоит в сведении системы к обыкновенному дифференциальному уравнению путем исключения одной из искомых функций. Покажем это на примере.

Задача 12. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}.$$

Решение. Выразив x через y, y' из 2-го уравнения системы и подставив в 1-е уравнение, получим:

$$x=y'+y,\ (y'+y)'=-3(y'+y)-y,$$

$$y''+y'=-3y'-3y-y, \text{ т.е. } y''+4y'+4y=0.$$

Для решения последнего уравнения составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ и решим его:

$(\lambda + 2)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -2$. В соответствии с формулой (5.11) $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$. Подставив найденную функцию $y(t)$ в выражение $x(t) = y'(t) + y(t)$, найдем $x(t)$:
$x(t) = \left((c_1 + c_2 t)e^{-2t}\right)' + (c_1 + c_2 t)e^{-2t} = c_2 e^{-2t} - 2(c_1 + c_2 t)e^{-2t} + (c_1 + c_2 t)e^{-2t} =$
$= (c_2 - 2c_1 - 2c_2 t + c_1 + c_2 t)e^{-2t} = (c_2 - c_1 - c_2 t)e^{-2t}$.

Итак

$$\begin{cases} x(t) = (c_2 - c_1 - c_2 t)e^{-2t} \\ y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \end{cases}$$ – общее решение исходной системы.

6. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

6.1. Неопределенный интеграл и его вычисление.

Задачи 1-10. Вычислить неопределенные интегралы: а) методом замены переменной; б) методом интегрирования по частям.

1. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; б) $\int (2x^2 + x + 1)e^x dx$.
2. а) $\int \frac{(arctgx)^2 dx}{1 + x^2}$; б) $\int (3x + 2)e^{\frac{x}{2}} dx$.
3. а) $\int xe^{x^2} dx$; б) $\int (x^2 - x + 1)\sin xdx$.
4. а) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$; б) $\int x^2 \ln xdx$.
5. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$; б) $\int (3x^2 + 2x - 1)\cos xdx$.
6. а) $\int \frac{(2x - 3)dx}{x^2 - 3x + 8}$; б) $\int (2x + 5)e^{3x+1} dx$.
7. а) $\int \sin^3 x \cos xdx$; б) $\int x \ln xdx$.
8. а) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int arctgxdx$.
9. а) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 + x^5}}$; б) $\int (x + 1)\cos 2xdx$.

10. а) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; б) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$.

Задачи 11-20. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{(ax^2+bx+c)dx}{(x+d)(x^2+px+q)}$.

11.	*a = 2,*	*b = -4,*	*c = -5,*	*d = 3,*	*p = 2,*	*q = 2.*
12.	*a = 6,*	*b = 5,*	*c = -8,*	*d = -3,*	*p = 6,*	*q = 34.*
13.	*a = 1,*	*b = 22,*	*c = 45,*	*d = -5,*	*p = 8,*	*q = 25.*
14.	*a = 1,*	*b = 21,*	*c = 64,*	*d = -4,*	*p =10,*	*q = 26.*
15.	*a = 4,*	*b = -20,*	*c = 49,*	*d = -1,*	*p = -6,*	*q = 18.*
16.	*a = 4,*	*b = 13,*	*c = 14,*	*d = 4,*	*p = 2,*	*q = 5.*
17.	*a = -1,*	*b = 1,*	*c = 31,*	*d = 1,*	*p = -8,*	*q = 20.*
18.	*a = 4,*	*b = 27,*	*c = 60,*	*d = -2,*	*p = 12*	*q = 37.*
19.	*a = 1,*	*b = -5,*	*c = 50,*	*d = 2,*	*p = -4,*	*q = 20.*
20.	*a = 5,*	*b = 12,*	*c = 3,*	*d = -1,*	*p = 4,*	*q = 5.*

Задачи 21-30. Вычислить неопределенныt интегралы от иррациональных и от тригонометрических функций.

21. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; б) $\int \sin^3 x dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}-1}$; б) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

23. а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-4}$; б) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}$.

24. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}+\sqrt[4]{x-1}}$; б) $\int \sin^2 2x dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.

26. а) $\int \frac{\sqrt{2x-1}dx}{3+\sqrt{2x-1}}$; б) $\int \cos^3 x dx$.

27. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[4]{x})}$; б) $\int \sin^2 3x dx$.

28. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})}$; б) $\int tg^3 x dx$.

29. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}-\sqrt[4]{4x+1}}$; б) $\int \cos^2 5x dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(1-\sqrt[3]{x+1})}$; б) $\int ctg^3 x dx$.

6.2. Определенный интеграл и его применение

Задачи 31-40. Вычислить площадь фигуры ограниченной данными линиями и изобразить фигуру на чертеже.

31. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ y = 0.$
32. $r = 2 + \cos\varphi$ (улитка Паскаля).
33. $r = 2 + \sin\varphi.$
34. $y = -x^2 + 4x + 1,\ y - x - 1 = 0.$
35. $4y = x^2,\ y^2 = 4x.$
36. $xy = 6,\ x + y - 7 = 0.$
37. $y = \frac{1}{1+x^2},\ y = \frac{x^2}{2}.$
38. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1.$
39. $xy = 4,\ x = 4,\ y = 4,\ x = 0,\ y = 0.$
40. $y = \frac{16}{x},\ y = 17 - x.$

Задачи 41-50. Вычислить длину дуги кривой.

41. $y = x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 4.$
42. $y = \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$
43. $y = \ln\sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}.$
44. $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
45. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ (арка циклоиды).
46. $x = 3\cos^3 t,\ y = 4\sin^2 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
47. $x = \frac{t^3}{3} - t,\ y = t^2 + 2,\ 0 \le t \le 3.$
48. $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (четверть астроиды).
49. $x = 8\sin t + 6\cos t,\ y = 6\sin t + 8\cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

50. $r=\sin^3\frac{\varphi}{3},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

Задачи 51-60. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси $0x$ (задачи 51-56) или вокруг оси $0y$ (задачи 57-60). Изобразить фигуру на рисунке.

51. $y=x^2,\ x=y^2.$
52. $y=2x-x^2,\ y=0.$
53. $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0.$
54. $y=1+\cos x,\ x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0.$
55. $y=1+\sin x,\ x=0,\ x=\pi,\ y=0.$
56. $y=1+e^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0.$
57. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$
58. $x^2-y^2=4,\ y=0,\ y=2.$
59. $x=4y-y^2,\ x=0.$
60. $y=x^3,\ y=1,\ x=0.$

Задачи 61-70. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость).

61. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$
62. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$
63. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x}.$
64. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}.$
65. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+1}.$
66. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$
67. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}.$
68. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$
69. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$
70. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

6.3. Криволинейные интегралы и их применение

Задачи 71-76. Вычислить криволинейные интегралы.

71. $\int\limits_C yds,$ где C – дуга параболы $y^2 = 2x,$ заключенная между точками O(0;0) и A(2;2).

72. $\int\limits_C xds,$ где C – дуга параболы $y = x^2,$ заключенная между точками A(7;2) и B(2;4).

73. $\int\limits_C xds,$ где C – отрезок прямой от точки O(0;0) до точки A(1;2).

74. $\int\limits_C \sqrt{2y}ds,$ где C – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

75. $\int\limits_C (x^2 + y\ \ )dx + xydy,$ C – дуга кривой $y = e^x,$ заключенная между точками A(0;1) и B(1;e).

76. $\int\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy,$ где C- четверть окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

Задачи 77-80. Вычислить с помощью криволинейных интегралов.

77. Длину дуги кривой $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ 0 \le t \le \pi.$

78. Работу силы $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки по четверти окружности $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

79. Работу силы $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой $y = \sqrt{x}$ от точки O(0;0) до точки A(1;1).

80. Работу силы $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой $x = t,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1.$

6.4. Кратные интегралы и их применение

Задачи 81-90. Изменить порядок интегрирования. Изобразить область интегрирования.

81. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx.$

82. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_1^{x^2} f(x, y)dy.$

83. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$

84. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy.$

85. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{4+2x} f(x,y)dy.$

86. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

87. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

88. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

89. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$

90. $\int\limits_2^5 dx \int\limits_{\frac{10}{x}}^{7-x} f(x,y)dy.$

Задачи 91-100. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями, переходя, где это необходимо, к полярным координатам.

91. $\iint\limits_D (y+1)dxdy,$ где $\mathrm{D}: x = y^2,\ x = 5y.$

92. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2} dxdy,$ где $\mathrm{D}: x = y,\ xy = 1,\ y = 2.$

93. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$ где D - круг $x^2 + y^2 \le 1.$

94. $\iint\limits_D xdxdy,$ где $\mathrm{D}: y = x^2,\ y = \frac{2}{1+x^2}.$

95. $\iint\limits_D (y+x)dxdy,$ где $\mathrm{D}: y = x^2 - 1,\ \mathrm{y} = 1 - x^2.$

96. $\iint\limits_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy,$ где D - полукруг $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0.$

97. $\iint\limits_D (x - y^2)dxdy,$ где $\mathrm{D}: y = x^2,\ \mathrm{y} = 4.$

98. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy,$ где D - четверть круга $x^2 + y^2 \le 1,$ расположенного в первом квадранте.

99. $\iint\limits_D xdxdy,$ где $\mathrm{D}: xy = 6,\ y + x - 7 = 0.$

100. $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy,$ где $\mathrm{D}: y = x^2,\ y^2 = x.$

Задачи 101-110. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить с помощью тройного интеграла объемы тел, ограниченных указанными поверхностями. Изобразить данные тела.

101. $z = x^2 + y^2 - 1,\ z = 0.$

102. $z = x^2 + y^2,\ z = 4.$

103. $z = 8 - (x^2 + y^2),\ z = x^2 + y^2.$

104. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0.$

105. $z = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

106. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

107. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0.$

108. $z = x + 10,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$

109. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

110. $z = y + 5,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$

6.5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи 111-120. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

111. $xy' + e = 3.$

112. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}.$

113. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$

114. $xy' - y = x \ln \frac{x}{y}.$

115. $y' - y = e^x.$

116. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$

117. $y' + 2xy = 3x^2 \cdot e^{-x^2}.$

118. $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0.$

119. $(x + 1)y' + y = x^3 + x.$

120. $xy' = y \ln \frac{y}{x}.$

Задачи 121-130. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

121. $y'' + 2\frac{y'}{x} = x^2.$

122. $y'' = \ln x.$

123. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

124. $y''(1 + y) - 5(y')^2 = 0.$

125. $y'' x \ln x = y'.$

126. $yy'' = (y')^2.$

127. $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin x.$

128. $(y - 2)y'' = 2(y')^2.$

129. $xy'' = y'.$

130. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1.$

Задачи 131-140. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

131. $y'' + 4y = 0,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
132. $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$
133. $y'' + 4y' + 4y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$
134. $y'' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
135. $y'' + 4y' + 29y = 0,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$
136. $4y'' + 4y' + y = 0,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
137. $y'' + 6y' + 13y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$
138. $y'' + 8y' + 16y = 0,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$
139. $y'' + 2y' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$
140. $y'' + 5y' = 0,$ $\quad y(0) = 7, \quad y'(0) = -20.$

Задачи 141-150. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка.

141. $y'' - 3y' + 2y = (3 + 2x)e^{3x}.$
142. $y'' - 4y = 8x^3.$
143. $y'' + 4y' + 13y = (18x + 6)e^{x}.$
144. $y'' + 6y' - 8y = 8e^{3x}.$
145. $y'' - 2y' + y = 4\sin 2x - 3\cos 2x.$
146. $y'' + 2y' + 10y = 18e^{-x}.$
147. $y'' - 6y' + 9y = 2\cos x + 14\sin x.$
148. $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 - 12x + 7.$
149. $y'' + 3y' = (4x - 2)e^{-x}.$
150. $y'' - 2y' + 26y = 25\cos x + 2\sin x.$

Задачи 151-160. Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

151. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dx}{dt} = x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

152. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

153. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$

154. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$

155. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dx}{dt} = x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -2, \quad y(0) = 2.$

156. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 3, \quad y(0) = 5.$

157. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -4x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = 4.$

158. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

159. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

160. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

ПРОГРАММА

Курса "Высшая математика"
для студентов первого курса заочного факультета, обучающихся
по всем специальностям (кроме Т.16.01.).

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось. Прямоугольная система координат в пространстве. Направляющие косинусы и длина вектора.
2. Линейно-независимые системы векторов. Базис. Разложение вектора по базису.
3. Скалярное произведение векторов и его свойства. Угол между векторами, условие ортогональности двух векторов.
4. Определители второго и третьего порядков, их свойства и вычисление. Определители n-го порядка.
5. Матрицы. Действия над матрицами. Ранг матрицы. Обратная матрица.
6. Векторное произведение двух векторов и его свойства . Условие коллинеарности двух векторов.
7. Смешанное произведение векторов и его свойства. Условие компланарности трех векторов.
8. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Формула Крамера. Матричный метод решения систем.
9. Уравнение линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Полярные координаты.
10. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
11. Поверхности. Цилиндрические поверхности. Поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

ТЕМА 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Множество вещественных чисел. Числовые последовательности. Предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число е. Натуральные логарифмы.
2. Функция. Область определения функции. Способы задания. Основные элементарные функции и их графики. Сложная функция. Классификация функций. Неявные функции. Функции, заданные параметрически.
3. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Односторонние пределы.

4. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые. Использование эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов.

5. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва и их классификация. Основные свойства непрерывных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Дифференцируемость и непрерывность. Производная суммы, произведения и частного. Производная сложной и обратной функции.

2. Производные основных элементарных функций. Производная неявной функции. Производная функции, заданной параметрически.

3. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Основные свойства дифференциала. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

4. Производные и дифференциалы высших порядков.

5. Теоремы о среднем: Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей с использованием правила Лопиталя.

6. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Представление функций e^x, Cosx, Sinx, ln(1+x),$(1+x)^m$ по формуле Тейлора. Приложение формулы Тейлора.

ТЕМА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Условия возрастания и убывания функции. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточные признаки существования экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке.

2. Исследование функций на экстремум с помощью производных высших порядков. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций.

ТЕМА 5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие функции нескольких переменных: область определения, предел функции, непрерывность.

2. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций.

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

4. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

5. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

6. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.

7. Производная по направлению. Градиент.

ТЕМА 6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

2. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Применение таблиц интегралов.

ТЕМА 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определенный интеграл и его основные свойства.

2. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

3. Вычисление определенного интеграла интегрированием по частям и подстановкой.

4. Приложение определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла.

5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости.

ТЕМА 8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, основные понятия (решение, общее решение, начальные условия, частное решение). Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

2. Основные классы уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах (уравнение с разделенными переменными, уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения).

3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

4. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

5. Линейные однородные уравнения. Структура общего решения.

6. Линейные неоднородные уравнения. Структура общего решения.

7. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

8. Линейные неоднородные уравнения второго порядка со специальной правой частью. Метод подбора частных решений.

9. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

10. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения.

11. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Векторно-матричная запись системы и ее общего решения.

ТЕМА 9. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Двойной интеграл, его геометрический и механический смысл. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах.

2. Приложение двойных интегралов к задачам геометрии, физики и механики.

3. Понятие о тройном интеграле его свойствах и вычислении.

ТЕМА 10. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода, их основные свойства. Вычисление криволинейных интегралов.

2. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

3. Понятие о поверхностных интегралах, их свойства и вычисление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике.–Мн., 1991.–480 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии.– М.: Наука, 1969.-272 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.–М.: Наука, 1978.– Т.1.–456 с.; т.2.–576 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.А. Высшая математика в упражнениях и задачах.–М.: Высшая школа, 1980.–Ч.1.–321 с., ч.2.–368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ