ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие, предназначенное для оказания помощи студентам-заочникам при выполнении контрольных работ по дисциплине "Высшая математика", содержит шесть тем материала контрольных работ студентов первого курса.

В пособии приведены основные теоретические сведения и типовые задачи с решениями и рекомендациями. В процессе подготовки к выполнению контрольной работы рекомендуется изучить теоретические сведения, разобраться с решениями предложенных типовых задач, решить несколько аналогичных задач, ответы на которые известны, и только после этого переходить к выполнению контрольной работы.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Введем понятие определителя. Пусть дана таблица из чисел (матрица):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы. Матрице (1.1) соответствует определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.2}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя. Говорят, что элементы a_{11}, a_{22} лежат на главной диагонали, а элементы a_{21} и a_{12} – на побочной.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка

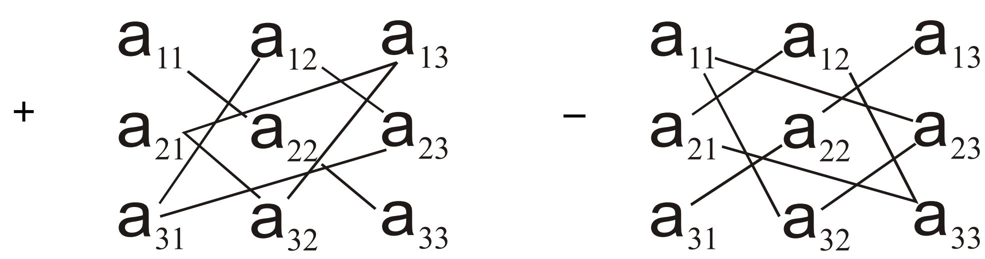
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Матрице (1.3) соответствует определитель третьего порядка, который определяется следующим равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.4}$$

Числа a_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ называются элементами определителя, причем a_{11}, a_{22}, a_{33} – это элементы главной диагонали, a_{13}, a_{22}, a_{31} – элементы побочной диагонали.

Указанное правило вычисления определителя называется правилом треугольников. Действительно, слагаемые, входящие в формулу (1.4) со знаком "+", лежат на главной диагонали определителя, а также в углах треугольников со сторонами, параллельными главной диагонали, а слагаемые, входящие в формулу (1.4) со знаком "–", лежат на побочной диагонали и в углах треугольников со сторонами, параллельными побочной диагонали:



Рассмотрим применение определителей для решения систем линейных уравнений. Пусть дана система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

где a_{ij}, b_i $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ – заданные числа.

Пусть определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (1.5), отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.6}$$

Тогда система (1.5) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \text{ (j=1, 2, 3)}, \tag{1.7}$$

где Δ_j – определитель, полученный из определителя системы путем замены j–го столбца столбцом свободных членов.

Задача 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель Δ данной системы по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot1+(-4)\cdot3\cdot1+1\cdot1\cdot(-1)-1\cdot(-5)\cdot1-2\cdot3\cdot(-1)-1\cdot1\cdot(-4)=-8\neq0.$$

Вычисляем вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot1+(-4)\cdot3\cdot1+1\cdot(-1)\cdot(-1)-1\cdot(-5)\cdot1-3\cdot3\cdot(-1)-1\cdot(-1)\cdot(-4)=-16,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot1+1\cdot3\cdot3+1\cdot1\cdot1-1\cdot(-1)\cdot1-2\cdot3\cdot1-1\cdot1\cdot3=0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot1+1\cdot(-4)\cdot(-1)+3\cdot1\cdot(-1)-3\cdot(-5)\cdot1-2\cdot(-1)\cdot(-1)-(-4)\cdot1\cdot1=8.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-16}{-8} = 2$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{0}{-8} = 0$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{8}{-8} = -1$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Основные сведения из векторной алгебры

Вектором называют направленный отрезок. Если точка A – начало вектора, а B – его конец, то такой вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$. Наряду с этим используется обозначение вектора малой латинской буквой со стрелкой, т.е. $\vec{a}$.

Векторы называют равными, если они имеют равные длины и одинаково направлены. Число, равное длине вектора, называется его модулем и обозначается символом $|\vec{a}|$. Если $|\vec{a}|=1$, то вектор $\vec{a}$ называется единичным. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых.

Пусть вектор $\vec{a}$ наклонен к оси *u* под углом φ. Тогда проекция вектора $\vec{a}$ на ось *u* обозначается символом $np_u\vec{a}$ и вычисляется по формуле

$$np_u\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{2.1}$$

Проекции вектора $\vec{a}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат будем далее обозначать буквами *x, y, z* и писать $\vec{a} = \{x, y, z\}$. Если при этом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - базисные векторы данной системы координат, то

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.2}$$

Проекции вектора на координатные оси называют также его координатами.

Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ являющиеся соответственно началом и концом вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \tag{2.3}$$

Длина вектора $\vec{a}$ находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.4}$$

Если вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями углы α, β и γ, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – это направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, определяемые по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}, \tag{2.5}$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.6}$$

Над векторами $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ определены операции сложения, умножения на число , а также скалярное, векторное и смешанное произведения.

При этом имеют место следующие формулы для выполнения указанных операций в координатной форме:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\},\ \alpha\vec{a} = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3\} \tag{2.7}$$

– для суммы векторов и произведения вектора на число;

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{2.8}$$

– для скалярного произведения;

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \tag{2.9}$$

– для векторного произведения;

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

– для смешанного произведения.

Из определения скалярного произведения $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$ и формулы (2.8) можно найти косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{2.11}$$

Поскольку вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, определенный формулой (2.9), обладает свойством

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi, \tag{2.12}$$

то площадь S треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|. \tag{2.13}$$

Наконец, из определения смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вытекает, что объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, определяется формулой

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|. \tag{2.14}$$

2.2 Основные сведения из аналитической геометрии

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{a,b,c\}$, имеет вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{2.15}$$

или $\quad ax+by+cz+d=0,$ (2.16)

где $d=-ax_0-by_0-cz_0$.

Уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a^*}+\frac{y}{b^*}+\frac{z}{c^*}=1. \tag{2.17}$$

Здесь a^*, b^* и c^* – координаты точек, в которых плоскость пересекает оси Ox, Oy, Oz.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.18}$$

Если две плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, то угол между ними определяется как угол между перпендикулярными к ним векторами $\vec{n}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{2.19}$$

Следовательно, условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид $\cos\varphi = 0$, или

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0, \tag{2.20}$$

а условие параллельности имеет вид

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{2.21}$$

Угол между вектором $\vec{l} = \{m, n, p\}$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$ можно найти по формуле

$$\sin\alpha = \frac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \tag{2.22}$$

а расстояние *d* от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до той же плоскости – по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + bx_0 + cx_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим соответствующие формулы для прямой на плоскости.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{a, b\}$, имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{2.24}$$

или

$$ax + by + c = 0 \tag{2.25}$$

где $c = -ax_0 - by_0$.

Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a^*} + \frac{y}{b^*} = 1. \tag{2.26}$$

Здесь a^* и b^* – координаты точек, в которых прямая (2.26) пересекает оси *Ox* и *Oy*.

Если две прямые заданы уравнениями $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, то угол между ними определяется как угол между перпендикулярными к ним векторами $\vec{n}_1 = \{a_1, b_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{a_2, b_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (2.27)$$

Следовательно, условие перпендикулярности двух прямых имеет вид $\cos\varphi = 0$, или

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0, \qquad (2.28)$$

а условие параллельности имеет вид

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (2.29)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (2.25) можно найти по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Рассмотрим другие виды уравнений прямой на плоскости.

Каноническое уравнение прямой, т.е. уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q} = \{m, n\}$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (2.30)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.31)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k* имеет вид

$$y = kx + b \qquad (2.32)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (2.33)$$

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{2.34}$$

Если две прямые заданы уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \tag{2.35}$$

а условие параллельности имеет вид

$$k_1 = k_2. \tag{2.36}$$

Рассмотрим далее различные виды прямой в пространстве.

Каноническое уравнение прямой в пространстве имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{2.37}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая на прямой, а $\vec{q} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2.38}$$

Параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{2.39}$$

Наконец, рассмотрим уравнения кривых второго порядка.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.40}$$

Поскольку частным случаем эллипса при $a^2 = b^2 = R^2$ является окружность, то уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат будет

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2.41}$$

Если центр окружности радиуса R расположен в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее уравнение имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{2.42}$$

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.43}$$

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{2.44}$$

2.3. Полярная система координат

Если на плоскости заданы фиксированная точка *O*, называемая полюсом, и исходящий из полюса луч с выбранной на нем единицей масштаба, называемый полярной осью, то говорят, что на плоскости задана полярная система координат. В этом случае положение любой точки *M* на плоскости определяется двумя числами r и φ, где r – расстояние от точки *M* до точки *O*, φ – угол, образуемый вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением полярной оси. Угол φ, отсчитываемый от полярной оси до вектора $\overrightarrow{OM}$ в направлении против часовой стрелки, считается положительным, а отсчитываемый в противоположном направлении – отрицательным (см. рис. 1).

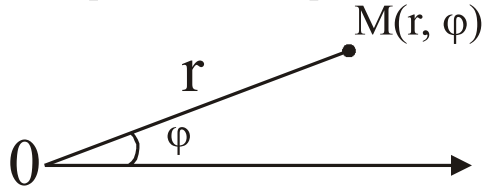


Рис. 1

Обычно считают, что $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r < \infty$. Если $r = 0$, точка *M* совпадает с полюсом *O* и угол φ для нее не определен.

Пусть наряду с полярной системой координат на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат так, что начало координат совпадает с полюсом *O*, а ось *Ox* совпадает с полярной осью. Тогда прямоугольные координаты *x* и *y* точки *M* связаны с ее полярными координатами r и φ соотношениями (см. рис.2)

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi \tag{2.45}$$

Из (2.45), в частности, вытекает, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2.46}$$

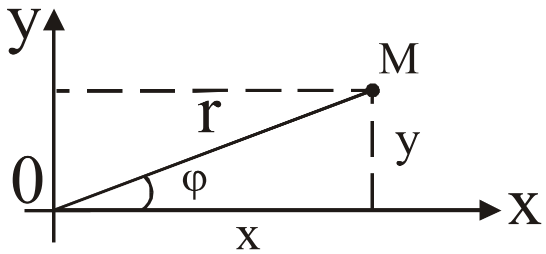


Рис. 2

Рассмотрим далее применение вышеизложенных теоретических сведений к решению типовых задач.

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3,3,9)$, $A_2(6,9,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. По формуле (2.3) найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{6-3,\ 9-3,\ 1-9\} = \{3, 6, -8\},$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{1-3, 7-3, 3-9\} = \{-2,\ 4,\ -6\},$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{8-3, 5-3, 8-9\} = \{5, 2, -1\}.$$

1) Длину ребра A_1A_2 найдем по формуле (2.4):

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-8)^2} = \sqrt{109}$$

2) Угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 найдем как угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ по формуле (2.11):

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{3\cdot 5 + 6\cdot 2 + (-8)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+6^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}} =$$
$$= \frac{35}{\sqrt{109}\cdot\sqrt{30}} \approx 0.6121,$$

откуда $\varphi = \arccos 0.6121 \approx 52^\circ 15''$.

3) Для нахождения угла α между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ найдем вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости $A_1A_2A_3$, в качестве которого можно взять векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, вычисляемое по формуле (2.9):

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & -8\\ -2 & 4 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -8\\ 4 & -6\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -8\\ -2 & -6\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=-4\cdot\vec{i}+34\cdot\vec{j}+24\cdot\vec{k}.$$

Синус искомого угла α равен косинусу угла β между векторами $\vec{n}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, т.к. сумма этих углов равна $\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{\left(\vec{n},\overrightarrow{A_1A_4}\right)}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{-4\cdot5+34\cdot2+24\cdot(-1)}{\sqrt{(-4)^2+34^2+24^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{24}{\sqrt{1748}\cdot\sqrt{30}}\approx0.1048,\ \text{т.е.}\ \alpha\approx\arcsin0.1048\approx6^\circ1'.$$

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ вычислим по формуле (2.13)

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|=\frac{1}{2}|\vec{n}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+34^2+24^2}=\frac{\sqrt{1748}}{2}=\sqrt{437}\approx20.9$$

5) Объем *V* пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдем по формулам (2.14) и (2.10):

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}3 & 6 & -8\\ -2 & 4 & -6\\ 5 & 2 & -1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left|3\cdot\begin{vmatrix}4 & -6\\ 2 & -1\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}-2 & -6\\ 5 & -1\end{vmatrix}++(-8)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot|3\cdot8-6\cdot32-8\cdot(-24)|=\frac{1}{6}\cdot|24|=4\ (\textit{куб.ед.}).$$

6) Уравнение прямой A_1A_2 найдем по формуле (2.38):

$$\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-3}{9-3}=\frac{z-9}{1-9},\ \text{т.е.}\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-9}{-8}.$$

7) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ найдем по формуле (2.18):

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-3 & z-9\\ 6-3 & 9-3 & 1-9\\ 1-3 & 7-3 & 3-9\end{vmatrix}=0,\ \text{т.е.}\ \begin{vmatrix}x-3 & y-3 & z-9\\ 3 & 6 & -8\\ -2 & 4 & -6\end{vmatrix}=0,$$

$$(x-3)\begin{vmatrix}6 & -8\\ 4 & -6\end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix}3 & -8\\ -2 & -6\end{vmatrix}+(z-9)\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & 4\end{vmatrix}=0,$$

$$-4(x-3)+34(y-3)+24(z-9)=0.$$

Отсюда $-4x+34y+24z-306=0$, или $2x-17y-12z-153=0$ – искомое уравнение плоскости.

8) Из полученного выше уравнения плоскости следует, что вектор $\vec{n}^*=\{2,-17,-12\}$ перпендикулярен плоскости $A_1A_2A_3$, поэтому он является направляющим вектором высоты, опущенной из вершины A_4 на эту плоскость. Следовательно, уравнение этой высоты можно найти по формуле (2.37):

$$\frac{x-8}{2}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-8}{-12}.$$

Задача 2. Вычислить координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1;1)$, $B(2;-1)$, $C(4;0)$.

Решение. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к серединам сторон треугольника.

Поэтому для решения этой задачи поступим следующим образом:

1) составим уравнения сторон AB и AC;
2) найдем координаты середин сторон AB и AC;
3) составим уравнения прямых, перпендикулярных сторонам AB и AC и проведенных через их середины;
4) найдем координаты центра окружности.

Уравнения сторон AB и AC найдем по формуле (2.31). Уравнение стороны AB будет

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-1}{-1-1},\ \text{или}\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2},\ \text{т.е.}\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}.$$

Уравнение стороны AC

$$\frac{x-(-1)}{4-(-1)}=\frac{y-1}{0-1},\ \text{или}\ \frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{-1},\ \text{т.е.}\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}.$$

Найдем координаты точек M и N, являющихся соответственно серединами сторон AB и AC, по формулам

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1-1}{2}=0,$$

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2},\ y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Итак, $M\left(\frac{1}{2},0\right)$ и $N\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ – середины сторон AB и AC.

Для составления уравнений прямых, проходящих через точки M и N перпендикулярно сторонам треугольника, используем формулу (2.33), найдя предварительно угловые коэффициенты этих прямых из условия (2.35).

Т.к. $k_{AB} = -\dfrac{2}{3}$ (см. найденное уравнение прямой AB), то $k_1 = -\dfrac{1}{k_{AB}} = \dfrac{3}{2}$, значит, уравнение первой прямой, проходящей через точку M, имеет вид

$$(y - y_M) = k_1(x - x_M), \text{ т.е. } y - 0 = \frac{3}{2}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ или } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Т.к. $k_{AC} = -\dfrac{1}{5}$ (см. найденное уравнение прямой AC), то $k_2 = -\dfrac{1}{k_{AC}} = 5$, значит, уравнение второй прямой, проходящей через точку N, имеет вид $y - y_N = k_2(x - x_N)$, т.е. $y - \dfrac{1}{2} = 5\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ или $y = 5x - 7$.

Решив систему из найденных двух уравнений, найдем координаты точки O – точки пересечения этих прямых, являющейся центром искомой окружности:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4} \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4} = 5x - 7 \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{14} \\ y = 5\cdot\dfrac{25}{14} - 7 = \dfrac{27}{14} \end{cases}$$

Итак, точка $O\left(\dfrac{25}{14}, \dfrac{27}{14}\right)$ – центр искомой окружности.

Примечание. При решении геометрических задач полезно делать рисунок. В нашем случае рисунок имеет вид

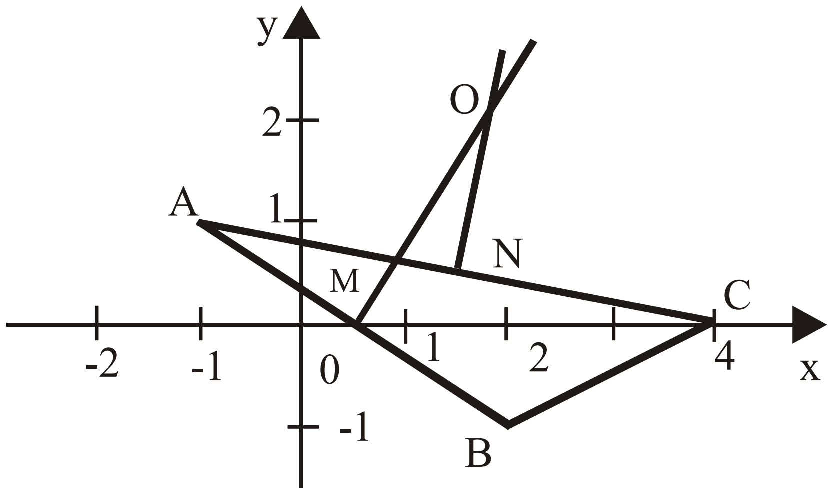


Рис. 3

Задача 3. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2,2)$ и от оси абсцисс.

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомой линии. Тогда расстояние MA запишем в соответствии с формулами (2.3) и (2.4) в виде

$$MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}\,.$$

Расстояние от точки M до оси абсцисс, т.е. до точки $N(x,0)$, такой, что $MN \perp Ox$, составит

$$MN = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} = |y|\,.$$

Т.к. по условию задачи $MA=MN$, то $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = |y|$, или, возведя обе части последнего уравнения в квадрат и выполнив тождественные преобразования, получим

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = y^2, \text{ т.е. } y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1\,.$$

Последнее уравнение есть уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $B(2,1)$.

Задача 4. Построить линию, заданную в полярной системе координат уравнением $r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\varphi}$.

Найти уравнение этой линии в прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью. По полученному уравнению определить тип линии.

Решение. Составим таблицу значений $r = r(\varphi)$ с шагом по φ, равным $\frac{\pi}{8}$:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	1,2	1,24	1,36	1,59	2,00	2,69	3,78	5,21	6,00

Проведем из начала координат лучи под углами $0, \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \ldots, \pi$ к полярной оси и отложим на них соответствующие значения радиуса r. Соединив эти точки плавной линией, получим изображение верхней части кривой. Т.к. $\cos\varphi$ – четная функция, то нижнюю часть кривой получим симметричным отображением верхней ее части относительно полярной оси (см. рис. 4).

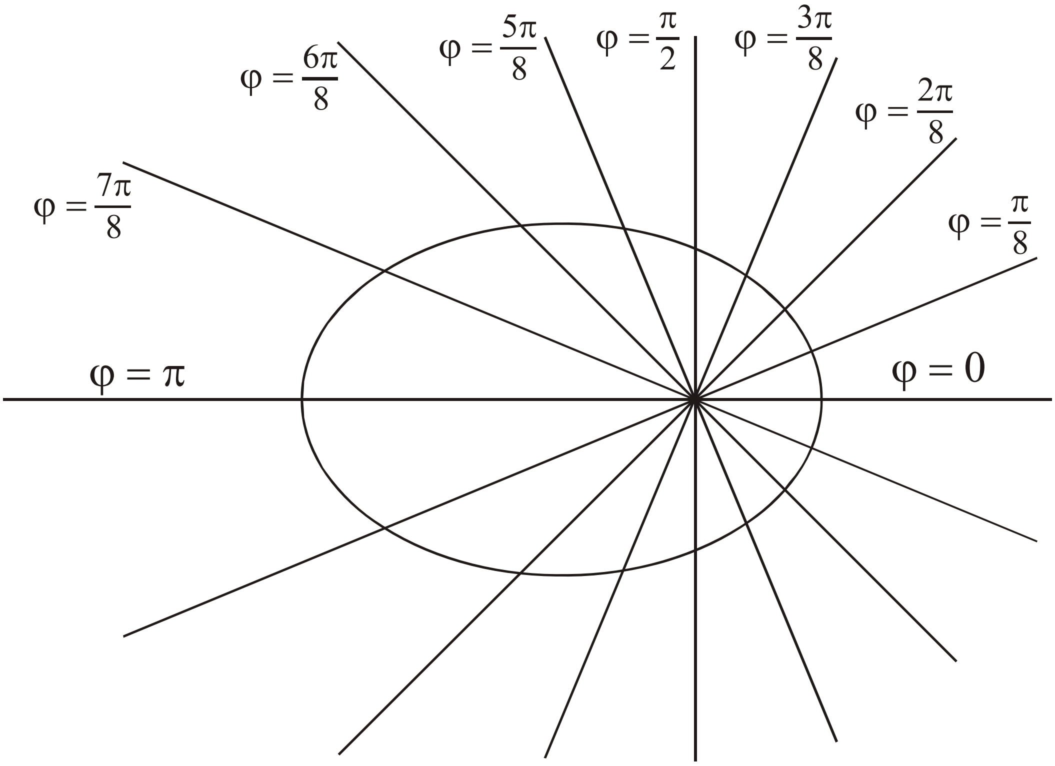


Рис. 4

Найдем уравнение этой кривой в декартовых координатах. Для этого, подставив в исходное уравнение $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{6}{3+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}},\text{ т.е. } 3\sqrt{x^2+y^2}+2x=6,$$

$$9\left(x^2+y^2\right)=36-24x+4x^2, \qquad 5x^2+24x+9y^2=36,$$

$$5\left(x^2+2\cdot\frac{12}{5}\cdot x+\frac{144}{25}\right)+9y^2=36+\frac{144}{5},\ 5\left(x+\frac{12}{5}\right)^2+9y^2=\frac{324}{5},$$

$$\frac{\left(x+\frac{12}{5}\right)^2}{\frac{324}{25}}+\frac{y^2}{\frac{324}{45}}=1,\text{ или } \frac{\left(x+\frac{12}{5}\right)^2}{\left(\frac{18}{5}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{18}{3\sqrt{5}}\right)^2}=1.$$

Последнее уравнение – это уравнение эллипса, центр которого сдвинут влево по оси Ox на $\dfrac{12}{5}$.

3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

3.1. Понятие предела функции и основные теоремы о пределах

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки *a*, кроме, быть может, самой этой точки. Число *A* называется пределом функции *f(x)* в точке *a*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - a| < \delta.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Введем понятие предела при $x \to \infty$. Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > \delta$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Аналогично можно определить и пределы *f(x)* при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Введем понятие бесконечного предела функции при $x \to a$. Говорят, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если для любого ε>0 существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|\, f(x) \,| > \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Аналогично определяются и другие конечные и бесконечные пределы при $x \to a$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Рассмотрим односторонние пределы. Если $x > a$ и $x \to a$, то это записывается в виде $x \to a + 0$. Числа

$$f(a - 0) = \lim_{x \to a - 0} f(x) \text{ и } f(a + 0) = \lim_{x \to a + 0} f(x)$$

называют соответственно пределом слева функции *f(x)* в точке *a* и пределом справа функции *f(x)* в точке *a* (если эти числа существуют).

Для существования предела *f(x)* при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $f(a - 0) = f(a + 0)$.

При вычислении пределов используют следующие основные теоремы о пределах.

Если существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то:

1) $$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x), \tag{3.1}$$

2) $$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x), \tag{3.2}$$

3) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ (если } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \text{)}, \tag{3.3}$$

4) $$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x). \tag{3.4}$$

Для элементарных функций во всех точках из области их определения

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.5}$$

Иногда полезно использовать равенства

$$\lim_{x\to a}(\ln f(x)) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \tag{3.6}$$

и $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$. (3.7)

Наконец, следует знать два замечательных предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ – 1-й замечательный предел,} \tag{3.8}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ или } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \text{ –2-й замечательный предел.} \tag{3.9}$$

Рассмотрим основные приемы вычисления пределов.

1) При нахождении предела отношения двух многочленов при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби полезно разделить на x^n, где n – наивысшая степень этих многочленов.

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-10}{3x^2-5x+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-10}{3x^2-5x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{10}{x^2}}{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1+0-0}{3-0+0} = \dfrac{1}{3}$.

При решении задачи применили деление числителя и знаменателя дроби на x^2 и использовали соотношения (3.1) – (3.3).

Иногда аналогичный прием можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

2) При нахождении предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ при $P(a)=Q(a)=0$ следует сократить дробь один или несколько раз на бином $x-a$.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+10}$.

Решение. Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx^2+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-5}=\frac{2-1}{2-5}=\frac{-1}{3}.$$

3) При вычислении пределов от выражений, содержащих иррациональность, переводим иррациональность из числителя в знаменатель или наоборот, используя умножение числителя и знаменателя дроби на сопряженную величину.

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

В данном случае умножили числитель и знаменатель дроби на величину, сопряженную числителю, далее сократили числитель и знаменатель на x и применили формулы (3.1), (3.2), (3.3).

4) При вычислении пределов от тригонометрических функций иногда приходится использовать 1-ый замечательный предел (3.8), а при раскрытии неопределенностей вида 1^{∞} – 2-й замечательный предел (3.9).

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=2.$$

При решении задачи использовали тригонометрическую формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, а также (3.4) и (3.8).

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{2x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1$, то в данном случае имеем неопределенность вида 1^{∞}, для раскрытия которой используем 2-й замечательный предел (3.9) следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^{\frac{2}{x+3}\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{1+\frac{3}{x}}}=e^{4}.$$

При решении задачи использовали (3.9) следующим образом:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}=\left|\textit{замена}\,\alpha=\dfrac{2}{x+3}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, использована также и формула (3.7).

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{x+2}{x}=(\infty\cdot 0)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}=\ln e^{2}=2\cdot\ln e=2.$$

При решении задачи использованы формулы (3.9) и (3.6), а также свойства логарифмов.

3.2. Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Поскольку для существования $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, то для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 в соответствии с определением необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0). \tag{3.10}$$

Обычно при исследовании функции на непрерывность проверяют выполнение соотношений (3.10).

При вычислении пределов функций часто используется теорема: "Элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения".

Наконец, функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке [*a, b*]*,* если она непрерывна в каждой точке этого отрезка. При этом под непрерывностью в точке *a* понимают непрерывность справа, а под непрерывностью в точке *b* – непрерывность слева.

Рассмотрим далее точки разрыва и их классификацию.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Следовательно, функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0, если в этой точке нарушается хотя бы одно из условий непрерывности, то есть либо $f(x)$*)* не определена в точке x_0, либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Если x_0 – точка разрыва функции *f(x)* и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \qquad (3.11)$$

то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода.

Следовательно, в точках разрыва 2-го рода, по крайней мере, один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не является конечным.

Задача 7. Для функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}$ заданы два значения аргумента $x_1 = 3$ и $x_2 = 5$. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точках разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

Решение. 1) Так как $f(x)$ является элементарной функцией, то она непрерывна во всех точках, в которых определена. Следовательно, в точке $x_1 = 3$ функция непрерывна, а в точке $x_2 = 5$ она не является непрерывной (деление на ноль не определено). Значит, $x_2 = 5$ – точка разрыва функции.
2) Вычислим односторонние пределы в точке $x_2 = 5$.

$$\lim_{x \to 5-0} 2^{\frac{1}{x-5}} = 2^{\frac{1}{5-0-5}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \to 5+0} 2^{\frac{1}{x-5}} = 2^{\frac{1}{5+0-5}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Один из пределов оказался бесконечным, поэтому $x_2 = 5$ – точка разрыва 2-го рода. 3) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x-5}} = 2^{\frac{1}{\infty}} = 2^0 = 1$, строим эскиз графика функции:

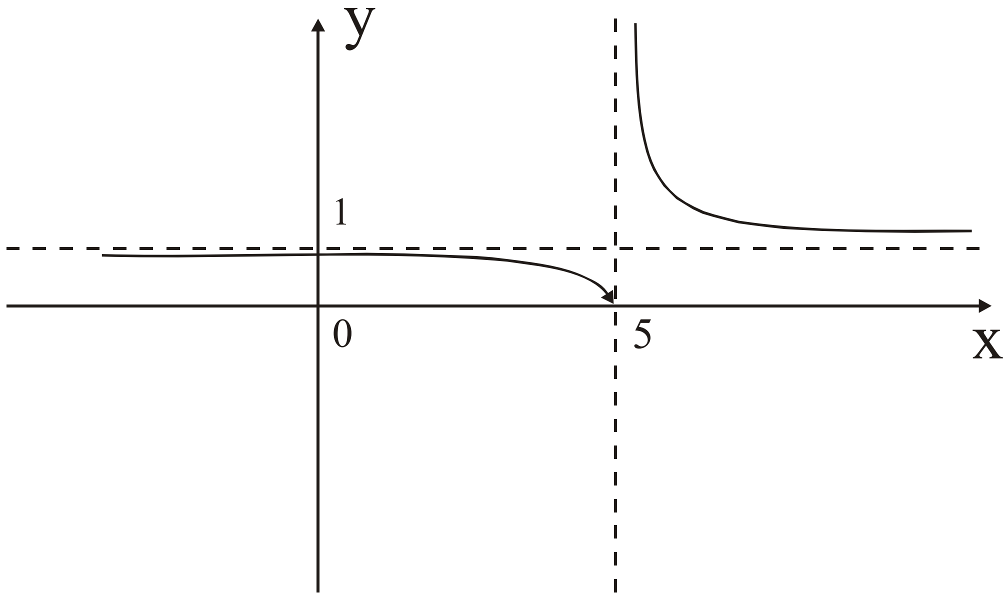


Рис. 5

Задача 8. Задана функция различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \; \textit{если} \;\; x \le 1, \\ 2x, \qquad \textit{если} \;\; 1 < x \le 3, \\ x + 2, \;\; \textit{если} \;\; x > 3. \end{cases}$$

Найти точки разрыва, если они существуют. Сделать чертеж.

Решение. Поскольку $f(x)$ задана тремя непрерывными элементарными функциями, то точками разрыва данной функции могут быть лишь точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Проверим в этих точках выполнение условий (3.10).

1) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} (2x) = 2 \cdot 1 = 2$, $f(1) = 1^2 + 1 = 2.$

Итак, в точке $x_1 = 1$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1)$, следовательно, в точке $x_1 = 1$ функция $f(x)$ непрерывна.

2) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0} 2x = 2\cdot 3 = 6$,

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} (x+2) = 3+2 = 5$, т.е. $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$.

Итак, точка $x_2 = 3$ – это точка разрыва функции $f(x)$. Поскольку односторонние пределы в этой точке конечны, то это точка разрыва 1-го рода.

Сделаем чертеж функции:

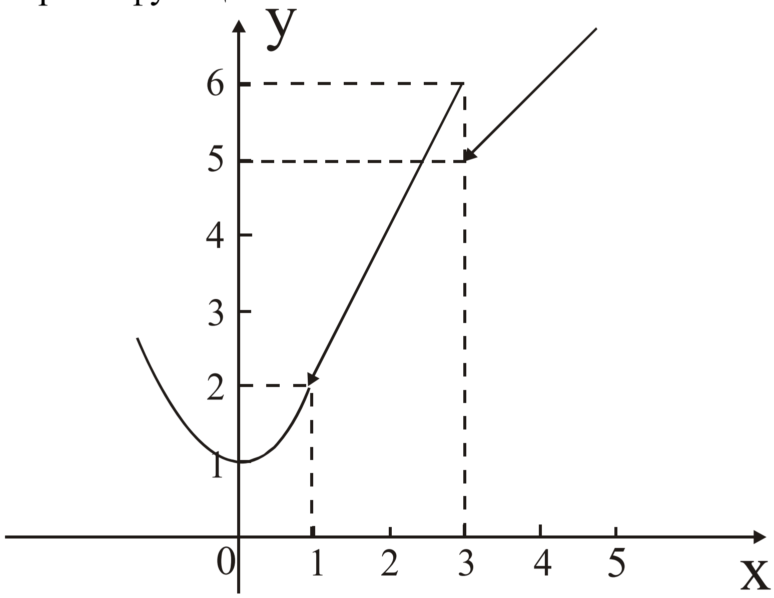


Рис. 6

4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

4.1. Производная. Правила вычисления производных и таблица производных

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, обозначаемый одним из символов: $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Итак, $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

С физической точки зрения производная определяет мгновенную скорость изменения любого физического параметра, описываемого функцией $f(x)$, в точке x.

С геометрической точки зрения производная $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$.

Если производная $f'(x)$ существует для всех $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой на интервале *(a;b)*. Операция вычисления производной называется дифференцированием.

Главная линейная часть приращения функции $f(x)$ в точке x называется дифференциалом функции. Дифференциал функции $f(x)$ обозначается символом $df(x)$ и вычисляется по формуле

$$df(x) = f'(x)dx. \qquad (4.2)$$

При вычислении производных используют правила вычисления производных, таблицу производных, правило вычисления производной сложной функции.

Основные правила нахождения производной. Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие производные, c=*const*, то

1) $c' = 0$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(uv)' = u'v + v'u$; 4) $(cu)' = cu'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Таблица производных:

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$
9. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
11. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
12. $\left(e^x\right)' = e^x$
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$
14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$

Правило вычисления производной сложной функции состоит в следующем.

Если *y=y(u)* и *u=u(x)*, где функции *y* и *u* имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad (4.3)$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Задача 1. Найти производные функций

а) $y = x^5 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x \cdot arctgx$; б) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$; в) $y = \left(\sin 2x + x^3\right)^5$;

г) $y=\ln^3 tg5x$.

Решение. Применяя правила вычисления производных и таблицу производных, выполним первые два пункта. а) $y'=\left(x^5\right)'+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\left(xarctgx\right)'=$

$$=5x^4-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}+x'arctgx+x\cdot\left(arctgx\right)'=5x^4-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}+arctgx+\frac{x}{1+x^2}.$$

б) $y'=\dfrac{\left(e^x\right)'\sin x-e^x\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x}=\dfrac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{e^x\left(\sin x-\cos x\right)}{\sin^2 x}.$

Применив правило вычисления производной сложной функции, выполним следующие пункты: в) полагая $y=u^5$, где $u(x)=\sin 2x+x^3$, получим

$$y'=\left(u^5\right)_u'=\left(\sin 2x+x^3\right)_x'=5\left(\sin 2x+x^3\right)^4\cdot\left(2\cos 2x+3x^2\right).$$

г) Так как y является степенной функцией от натурального логарифма, который, в свою очередь, является функцией от $tg5x$, последовательно получим $y'=3\left(\ln^2 tg5x\right)\cdot\left(\ln tg5x\right)'=3\left(\ln^2 tg5x\right)\dfrac{5}{tg5x\cdot\cos^2 5x}=$

$$=\frac{15\ln^2 tg5x}{\cos 5x\cdot\sin 5x}=\frac{30\ln^2 tg5x}{\sin 10x}.$$

4.2. Логарифмическое дифференцирование

При вычислении производной показательно-степенной функции вида $y=u(x)^{v(x)}$ полезно прологарифмировать обе части этого равенства и затем их продифференцировать: $\ln y=\ln u^v$, $\quad \ln y=v\ln u$, $\quad (\ln y)'=\left(v\ln u\right)'$,

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{u'}{u},\quad y'=y\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right).$$

Задача 2. Найти производную функции $y=\left(tgx\right)^{\sin x}$.

Решение. Логарифмируя и вычисляя производные от обеих частей равенства, получим $\ln y=\ln\left(tgx\right)^{\sin x}$, $\quad \left(\ln y\right)'=\left(\sin x\cdot\ln tgx\right)'$,

$$\frac{y'}{y}=\left(\cos x\right)\ln tgx+\left(\sin x\right)\frac{1}{tgx\cos^2 x},\quad y'=\left(tgx\right)^{\sin x}\left(\cos x\ln tgx+\frac{1}{\cos x}\right).$$

Рекомендуется предварительно логарифмировать обе части равенства при вычислении производных от функции, представляющих собой произведение многих сомножителей. В этом случае вычисление производной от произведения сводится к вычислению производной от суммы логарифмов.

Задача 3. Вычислить производную функции

$$y = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[5]{x+3}}.$$

Решение. Логарифмируя и вычисляя производные от обеих частей равенства, последовательно получим

$$(\ln y)' = \left(2\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x+1) + \tfrac{1}{3}\ln(2x+1) - \tfrac{1}{5}\ln(x+3)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{3(2x+1)} - \frac{1}{5(x+3)}\right),$$

т.е. $y' = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[5]{x+3}}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{2}{3(2x+1)} - \dfrac{1}{5(x+3)}\right).$

4.3. Производные неявных функций

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно соотношением вида $F(x,y)=0$, не разрешенным относительно y. В этом случае для нахождения y'_x следует продифференцировать обе части последнего равенства по переменной x, пользуясь, где это необходимо, теоремой о вычислении производной сложной функции. Из получившегося в результате дифференцирования равенства и находят y'_x.

Задача 4. Найти производную неявно заданной функции $y^2 x + e^{xy} = 0$.

Решение. Дифференцируя обе части равенства по переменной x и считая, что $y = y(x)$, получим

$$2y \cdot y' \cdot x + y^2 \cdot 1 + e^{xy}(1 \cdot y + xy') = 0,$$

$$2y \cdot y' \cdot x + xy' \cdot e^{xy} = -\left(y^2 + ye^{xy}\right),$$

т.е. $y' = \dfrac{-y\left(y + e^{xy}\right)}{2yx + xe^{xy}}$ – искомая производная.

4.4. Производные высших порядков

Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда ее производная $y'(x)$ также является некоторой функцией переменной x. Если она к тому же имеет производную в некоторой точке этого интервала, то указанная производная называется производной второго порядка функции $y(x)$ и обозначается $y''(x)$. Итак, $y''(x) = (y')'$. Аналогично производная от производной порядка $n-1$ называется производной n-го порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Задача 5. а) Найти производную второго порядка от функции $y=x^3e^{2x}$. б) Найти производную третьего порядка от функции $y=\cos^2 x$.

Решение.

а) $y'=\left(x^3\right)'e^{2x}+x^3\left(e^{2x}\right)'=3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}=\left(3x^2+2x^3\right)e^{2x}$,

$$y''=\left(\left(3x^2+2x^3\right)e^{2x}\right)'=\left(6x+6x^2\right)e^{2x}+\left(3x^2+2x^3\right)2e^{2x}=$$

$$=2x\left(3+6x+2x^2\right)e^{2x}.$$

б) $y'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x,\quad y''=(-\sin 2x)'=-2\cos 2x$,

$y'''=4\sin 2x$.

4.5. Производные параметрически заданных функций

Пусть $y=y(x)$ задана параметрически соотношениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta .$$

Тогда ее производные первого и второго порядка вычисляются, если они существуют, по формулам:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{4.4}$$

Задача 6. Найти y'_x, если $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t$.

Решение. Т.к. $y'_t=\sin t,\quad x'_t=1-\cos t$, то $y'_x=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

Т.к.

$$\left(y'_x\right)'_t=\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'_t=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}=\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=$$

$$=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}, \text{ то } y''_{xx}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2\cdot(1-\cos t)}=\frac{-1}{(1-\cos t)^2}.$$

4.6. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть в некоторой окрестности точки *(x,y)* задана функция $z=z(x,y)$. Фиксируя переменную *y* так, что *y=const*, получим функцию от одной переменной x. Обычная производная этой функции в точке x называется частной производной функции $z(x,y)$ в точке *(x,y)* и обозначается $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ или z'_x.

Итак, $$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\left.\frac{dz(x,y)}{dx}\right|_{y=const}. \qquad (4.5)$$

Аналогично $$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\left.\frac{dz(x,y)}{dy}\right|_{x=const}. \qquad (4.6)$$

Поскольку частные производные z'_x и z'_y, в свою очередь, являются функциями двух переменных, то и от них можно брать частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}, \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}. \qquad (4.8)$$

Частные производные (4.7) и (4.8) называются частными производными второго порядка. Взяв от них частные производные, получим частные производные третьего порядка и т.д.

Задача 7. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение. Вычислим, пользуясь определением, частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot(xy)'_x=ye^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy}\right)=ye^{xy}\cdot(xy)'_x=y^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\cdot(xy)'_y=xe^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{xy}\right)=xe^{xy}\cdot(xy)'_y=x^2e^{xy}.$$

Следовательно, $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2y^2e^{xy}-y^2x^2e^{xy}=0$, что и требовалось доказать.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

При исследовании функций и построении их графиков полезно придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность;

3) найти точки разрыва, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты, если они есть;

4) найти интервалы монотонности функции и точки экстремума;

5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба;

6) найти точки пересечения графика функции с координатными осями и построить график.

Задача 1. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ и построить её график.

Решение.

1) Т.к. функция не определена при $x_1=-1$ и $x_2=1$, то область определения функции $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Поскольку $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=y(x)$, то функция четная.

3) Т.к. в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$ функция не определена, то это точки разрыва функции. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2(1+0-1)}=\frac{1}{2(+0)}=+\infty.$$

Вычисленный односторонний предел оказался бесконечным, поэтому прямая x=1 будет вертикальной асимптотой графика функции.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2(1-0-1)}=\frac{1}{2(-0)}=-\infty.$$

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_2=-1$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{-2(-1+0+1)}=\frac{1}{-2(+0)}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{-2(-1-0+1)}=\frac{1}{-2(-0)}=+\infty.$$

Односторонние пределы и в точке x= –1 оказались бесконечными, поэтому прямая x= –1 будет вертикальной асимптотой графика функции.

Для нахождения наклонной асимптоты графика функции $y=kx+b$ вычислим два предела: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-kx)$, поскольку их существование (как конечных пределов) является необходимым и достаточным условием существования наклонной асимптоты. Вычисляем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\left(x^2-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Значит, прямая $y=0\cdot x+1$, т.е. $y=1$ – это наклонная асимптота графика функции и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. Поскольку k=0, то это частный случай наклонной асимптоты – горизонтальная асимптота.

4) Интервалы монотонности и точки экстремума найдем по знаку производной $y'=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Т.к. $y'>0$ при $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, то на этих интервалах функция возрастает, а т.к. $y'<0$ при $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, то на этих интервалах функция убывает.

Поскольку $y'(0)=0$, то $x=0$ – единственная критическая точка функции, а т.к. y' меняет знак в точке 0 с "+" на "–", то $x=0$ – точка максимума функции, причем $y(0)=0$.

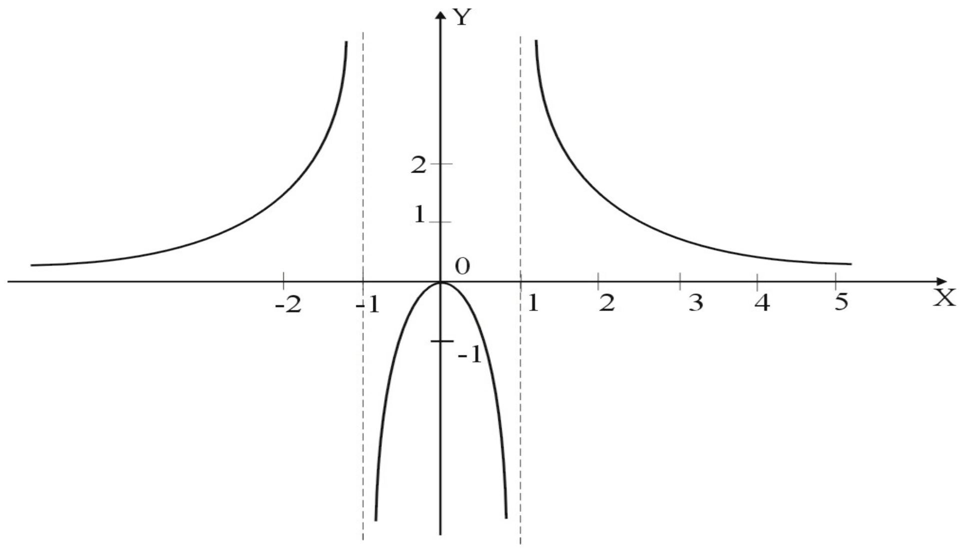


Рис. 7

5) Интервалы выпуклости и вогнутости найдем по знаку производной второго порядка y''.

$$y'' = \left(\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2} \right)' = -2\frac{1\cdot\left(x^2-1\right)^2 - x\cdot 2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2\left(1+3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Составим таблицу изменений знака y'':

x	(-∞;–1)	–1	(–1;1)	1	(1;+ ∞)
y''	+	не сущ.	–	не сущ.	+
y	∪(вогн.)	не сущ.	∩(вып.)	не сущ.	∪(вогн.)

Итак, на интервалах (-∞;–1) и (1;+ ∞) график функции вогнутый, а на интервале (–1;1) – выпуклый. Точек перегиба нет.

6) Учитывая, что $y(0)=0$, строим график:

Задача 2. Исследовать функцию $y = xe^{-x}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции – вся числовая прямая, т.е. $D(y)=R$.

2) Т.к. $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то $y(x)$ – ни четная, ни нечетная функция.

3) Данная функция является элементарной функцией, определенной на всей числовой прямой, значит, точек разрыва и вертикальных асимптот нет.

Исследуем наличие наклонных асимптот при x→+∞ и при x→ – ∞. Т.к.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

то прямая y=0 – горизонтальная асимптота графика функции при x→+∞ (являющаяся частным случаем наклонной асимптоты при x→+∞). Т.к. $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = +\infty$, то при x→-∞ наклонной асимптоты нет.

4) Найдем y': $y' = \left(xe^{-x}\right)' = 1\cdot e^{-x} - x\cdot e^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Т.к. $y'>0$ при $x<1$ и $y'<0$ при $x>1$, то функция при $x<1$ возрастает а при $x>1$ убывает. Т.к. y(1)=0, то x=1 – единственная критическая точка функции. Поскольку в критической точке функция меняет знак с "+" на "–", то x=1 – точка максимума функции и $y(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

5) Найдем y'': $y'' = \left((1-x)\,e^{-x}\right)' = -e^{-x} - (1-x)\,e^{-x} = (x-2)\,e^{-x}$. Т.к. $y''>0$ при $x>2$ и $y''<0$ при $x<2$, то при $x>2$ график функции вогнутый, а при $x<0$ – выпуклый. Поскольку $y''(2)=0$, то x=2 – единствен-

ная критическая точка второго рода. Т.к. в этой точке y'' меняет знак, то точка $M(2{,}2e^{-2})$ – точка перегиба графика функции.

6) Учитывая, что $y(0)=0$, строим график функции:

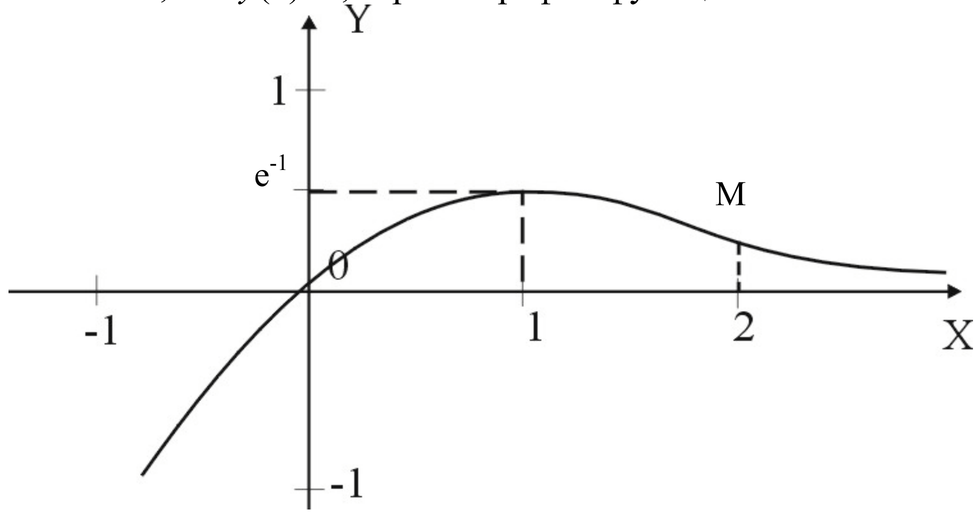


Рис. 8

6. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Известно, что непрерывная на отрезке функция достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Для их нахождения следует вычислить производную функции, найти ее критические точки. Вычислив далее значения функции в критических точках и на концах отрезка, выбирают из них наибольшее и наименьшее значения.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке [-2;2].

Решение. Найдем критические точки этой функции, лежащие на [-2;2].

Т.к. $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$, то $x=1$ – единственная критическая точка. Вычислим значение функции в точке $x=1$ и на концах отрезка [–2;2]: $y(1)=3$, $y(-2)= -24$, $y(2)=4$. Итак, $y_{\text{наим.}}= -24$, $y_{\text{наиб.}}=4$.

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

7.1. Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии

Задачи 1-10. Доказать совместность системы и решить ее по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=10, \\ 2x_1-3x_2-\ \ x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+5x_3=22. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3=14, \\ 3x_1+5x_2-\ \ x_3=5, \\ x_1-\ \ x_2+2x_3=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=3, \\ 7x_1-\ \ x_2+2x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-3x_3=4. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1-5x_2-6x_3=-4, \\ 4x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=9, \\ 3x_1+2x_2-2x_3=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=12, \\ x_1-3x_2+3x_3=2, \\ 2x_1-5x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1+\ \ x_2-7x_3=-6, \\ x_1+5x_2-\ \ x_3=4, \\ 2x_1-\ \ x_2+4x_3=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1+\ \ x_2-5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+\ \ x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-3x_3-4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=4, \\ 2x_1-\ \ x_2+8x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-4x_3=5. \end{cases}$

Задачи 11–20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$.

11. $A_1(2,4,7), A_2(6,6,2), A_3(5,4,7), A_4(7,3,0)$

12. $A_1(4,5,7), A_2(7,5,3), A_3(9,4,4), A_4(7,9,6)$

13. $A_1(4,2,0), A_2(6,1,1), A_3(4,6,6), A_4(1,2,6)$

14. $A_1(3,5,10), A_2(5,5,4), A_3(3,8,4), A_4(5,8,2)$

15. $A_1(4,6,3), A_2(0,7,1), A_3(4,1,5), A_4(3,9,8)$

16. $A_1(5,7,8), A_2(9,5,5), A_3(-3,7,1), A_4(6,9,2)$

17. $A_1(4,9,3), A_2(2,4,3), A_3(7,6,3), A_4(3,6,7)$

18. $A_1(1,9,9), A_2(3,5,4), A_3(5,8,3), A_4(6,4,8)$

19. $A_1(1,7,3), A_2(3,3,9), A_3(6,9,1), A_4(8,5,8)$

20. $A_1(-1,1,6), A_2(3,1,4), A_3(-1,6,1), A_4(0,4,-1)$

Задачи 21-30. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $F(a,0)$ и от прямой $x=b$ относятся как *c:d.*

21. *a*=4, *b*=25/4, *c*=4, *d*=5.

22. a=3, b=25/3, c=3, d=5.

23. a=6, b=50/3, c=3, d=5.

24. a=8, b=25/2, c=4, d=5.

25. a=5, b=16/5, c=5, d=4.

26. a=10, b=32/5, c=5, d=4.

27. a=13, b=144/13, c=13, d=12.

28. a=17, b=225/17, c=17, d=15.

29. a=2, b= –2, c=1, d=1.

30. a=3, b= –6, c=1, d=1.

Задачи 31-40. Построить линию, заданную в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$. Найти уравнение этой линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс с полярной осью. По полученному уравнению определить тип линии.

31. $r = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$. 32. $r = \dfrac{3}{1+\cos\varphi}$.

33. $r = 6\cos\varphi$. 34. $r = 4\sin\varphi$.

35. $r = \dfrac{10}{3-2\cos\varphi}$. 36. $r = \dfrac{3}{2-\cos\varphi}$.

37. $r = \dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$. 38. $r = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}$.

39. $r = \dfrac{12}{5-\cos\varphi}$. 40. $r = \dfrac{12}{2-\cos\varphi}$.

7.2. Предел и непрерывность функции

Задачи 41-50. Найти предел функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x-10}{x^2+2x-3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{x^2+3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

42. *а*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5+x}-3}{x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtgx}{1-\cos 4x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{x+1}{x^2}}$.

43. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+3x}{2x^3-x+10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\sin 2x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{1-3x}$.

44. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^{-5x}$.

45. *а*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 6x}}{x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)(\ln(x+2)-\ln x)$.

46. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+10}{3x^2-2x+5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{tgx\cos 2x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(3x+1)-\ln 3x)$.

47. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-8}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6x+1}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{tg^2 5x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$.

48. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{2}{x+1}}$.

49. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{4-x}$.

50. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{3x^2-2x+10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{\sin^2 3x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-x}$.

Задачи 51-60. Задана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точках разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

51. $f(x)=2^{\frac{1}{4-x}}$, $x_1=2, x_2=4$.

52. $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$, $x_1=2, x_2=4$.

53. $f(x)=4^{\frac{1}{5-x}}$, $x_1=6, x_2=5$.

54. $f(x)=5^{\frac{1}{6-x}}$, $x_1=3, x_2=6$.

55. $f(x)=6^{\frac{1}{3-x}}$, $x_1=4, x_2=3$.

56. $f(x)=7^{\frac{1}{x-4}}$, $x_1=1, x_2=4$.

57. $f(x)=8^{\frac{1}{x-5}}$, $x_1=2, x_2=5$.

58. $f(x)=9^{\frac{1}{6-x}}$, $x_1=4, x_2=6$.

59. $f(x)=10^{\frac{1}{x-3}}$, $x_1=5, x_2=3$.

60. $f(x)=11^{\frac{1}{4-x}}$, $x_1=1, x_2=4$.

Задачи 61-70. Функция $y(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва, если они существуют. Сделать чертёж.

61. $y=\begin{cases}-2x, & \textit{если } x\le 0,\\ x^2, & \textit{если } 0<x\le 2,\\ x+1, & \textit{если } x>2.\end{cases}$

62. $y=\begin{cases}x^2+1, & \textit{если } x\le 1,\\ 2x, & \textit{если } 1<x\le 3,\\ x+2, & \textit{если } x>3.\end{cases}$

63. $y=\begin{cases}2x^2, & \textit{если } x\le 0,\\ x, & \textit{если } 0<x\le 1,\\ 2, & \textit{если } x>1.\end{cases}$

64. $y=\begin{cases}x-1, & \textit{если } x\le 0,\\ x^2, & \textit{если } 0<x<2,\\ 2x, & \textit{если } x\ge 2.\end{cases}$

65. $y=\begin{cases} x-3, & \text{если } x<0, \\ x+1, & \text{если } 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x>4. \end{cases}$

66. $y=\begin{cases} 3x+1, & \text{если } x<0, \\ x^2+1, & \text{если } 0\le x<1, \\ 0, & \text{если } x\ge 1. \end{cases}$

67. $y=\begin{cases} -2x, & \text{если } x\le 0, \\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 1, \\ 2, & \text{если } x>1. \end{cases}$

68. $y=\begin{cases} 1, & \text{если } x<0, \\ x^2+1, & \text{если } 0\le x\le 1, \\ x, & \text{если } x>1. \end{cases}$

69. $y=\begin{cases} -x, & \text{если } x<0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0\le x\le 4, \\ x-1, & \text{если } x>4. \end{cases}$

70. $y=\begin{cases} 2x+1, & \text{если } x<-1, \\ x^2, & \text{если } -1\le x\le 2, \\ 6-x, & \text{если } x>2. \end{cases}$

7.3. Производная и ее вычисление

Задачи 71–80. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

71. а) $y=\ln^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)$; б) $y=\left(2e^x+\cos 3x\right)^4$;

в) $y=(\sin 2x)^{3x}$; г) $xy^2+x^2y+xy=1$.

72. а) $y=e^{3x+tg^2x}$; б) $y=tg^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$;

в) $y=\frac{x\sqrt[3]{x+2}\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}}$; г) $xy+e^y=y^2$.

73. а) $x\ln^2 5x-\ln\sin x$; б) $y=arctg\,\frac{x+1}{x-1}$;

в) $y=(tg3x)^{2x}$; г) $\cos(xy)=x$.

74. а) $y=\ln arctg\sqrt{1+x^2}$; б) $y=e^{3x+1}\left(x^2+3x+\sqrt{x}\right)$;

в) $y=\left(x^3+\sqrt{x}\right)^{\sin x}$; г) $x^3+y^3=xy$.

75. а) $y=\left(3^{\cos x}+tg^2x\right)^4$; б) $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}$;

в) $y=\sqrt[3]{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^5}}$; г) $y=3x+arcctgy$.

76. а) $y = 10^{1-\sin^3 x}$; б) $y = \arcsin\dfrac{x+1}{x-1}$;

в) $y = x^3 e^{2x}\sqrt{x+1}\sin 5x$; г) $x\sin y - y\cos x = 0$.

77. а) $y = \sqrt{1 + tg^2 x + tg^3 x}$; б) $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2;}$

в) $y = (arctgx)^x$; г) $tgy = xy$.

78. а) $y = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$; б) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^y}$;

в) $y = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{3x}$; г) $\ln y + \dfrac{x}{y} = 3$.

79. а) $y = \sin\left(e^{x^2+3x+1}\right)$; б) $y = \dfrac{1}{x} + \ln^3 x - \dfrac{\ln x}{x}$;

в) $y = \dfrac{(1+x)^2(1-2x)^3}{(1-x)^4(1+4x)^5}$; г) $x^2 + x^5 y + xy^3 = 0$.

80. а) $y = \ln ctg^2\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{x}{\sin^3 x} - \sqrt{x}\arcsin x$;

в) $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$; г) $e^y = x^3 + y^5$.

Задачи 81–90. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ параметрически заданных функций.

81. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \cos t. \end{cases}$ 82. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

83. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t. \end{cases}$ 84. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}$ 86. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$ 88. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$ 90. $\begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

Задачи 91–100. Проверить, удовлетворяет ли заданному уравнению функция $u = u(x, y)$.

91. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2,$ если $u = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right).$

92. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ если $u = \sin(x + ay).$

93. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y},$ если $u = \dfrac{x}{y}.$

94. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = e^{xy}.$

95. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = e^{\frac{y}{x}}.$

96. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = \ln\left(x^2 - y^2\right).$

97. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1,$ если $u = \ln\left(e^x + e^y\right).$

98. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = arctg\,\dfrac{y}{x}.$

99. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = \ln\left(x^2 - y^2\right).$

100. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},$ если $u = \sin(x - ay).$

7.4. Исследование функций и построение графиков

Задачи 101–110. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график.

101. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

102. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

103. $y = x^2 e^{-x}$.

104. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

105. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

106. $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

107. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

108. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

109. $y = \dfrac{8}{x^2-4}$.

110. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Задачи 111–120. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

111. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x,$ $[0, 3]$.

112. $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4,$ $[0, 4]$.

113. $f(x) = x^4 - 2x^2,$ $[0, 2]$.

114. $f(x) = x^3 - 12x,$ $[-1, 3]$.

115. $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$ $[1, 6]$.

116. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x},$ $[-5, -1]$.

117. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2,$ $[-2, 2]$.

118. $f(x) = x^3 - 3x^2,$ $[1, 3]$.

119. $f(x) = x^4 + 4x,$ $[-2, 2]$.

120. $f(x) = x^3 - 12x + 7,$ $[0, 3]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике.–Мн., 1991.–480 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии.– М.: Наука, 1969.-272 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.–М.: Наука, 1978.– Т.1.–456 с.; т.2.–576 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.А. Высшая математика в упражнениях и задачах.–М.: Высшая школа, 1980.–Ч.1.–321 с., ч.2.–368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ