

## 9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**Линия пересечения** двух поверхностей в общем виде представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на несколько частей. Надо иметь в виду, что проекции линий пересечения всегда располагаются в пределах площади наложения одноименных проекций пересекающихся поверхностей. При пересечении гранных поверхностей в общем случае получается пространственная ломаная линия.

**Обычно линию пересечения** двух поверхностей строят по отдельным точкам. При этом требуется выполнить условие инцидентности (взаимопринадлежности) точек и поверхностей. Для чего необходимо и достаточно, чтобы эти точки принадлежали линиям, находящимся в заданных поверхностях и пересекающимся между собой. Точки пересечения таких линий будут общими для заданных поверхностей, т.е. точками их пересечения. Такие линии получаются при пересечении заданных поверхностей вспомогательными поверхностями или плоскостями-посредниками.

В результате можно сформулировать следующий алгоритм построения пересечения двух поверхностей:

- заданные поверхности, например,  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 9.1), пересекают вспомогательной поверхностью  $\gamma$ ;
- строят линии пересечения  $a$  и  $b$  поверхностей вспомогательной поверхностью  $\gamma$  ( $a = \alpha \cap \gamma$ ;  $b = \beta \cap \gamma$ )
- точки пересечения  $K$  и  $M$  линии  $a$  с линией  $b$  принадлежат как  $\alpha$ , так и  $\beta$  ( $a \cap b = K, M$ ;  $K, M \subset \alpha$ ;  $K, M \subset \beta$ );
- повторяют предыдущие операции несколько раз, перемещая секущую плоскость;
- строят линию пересечения поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$ , соединяя полученные точки между собой.

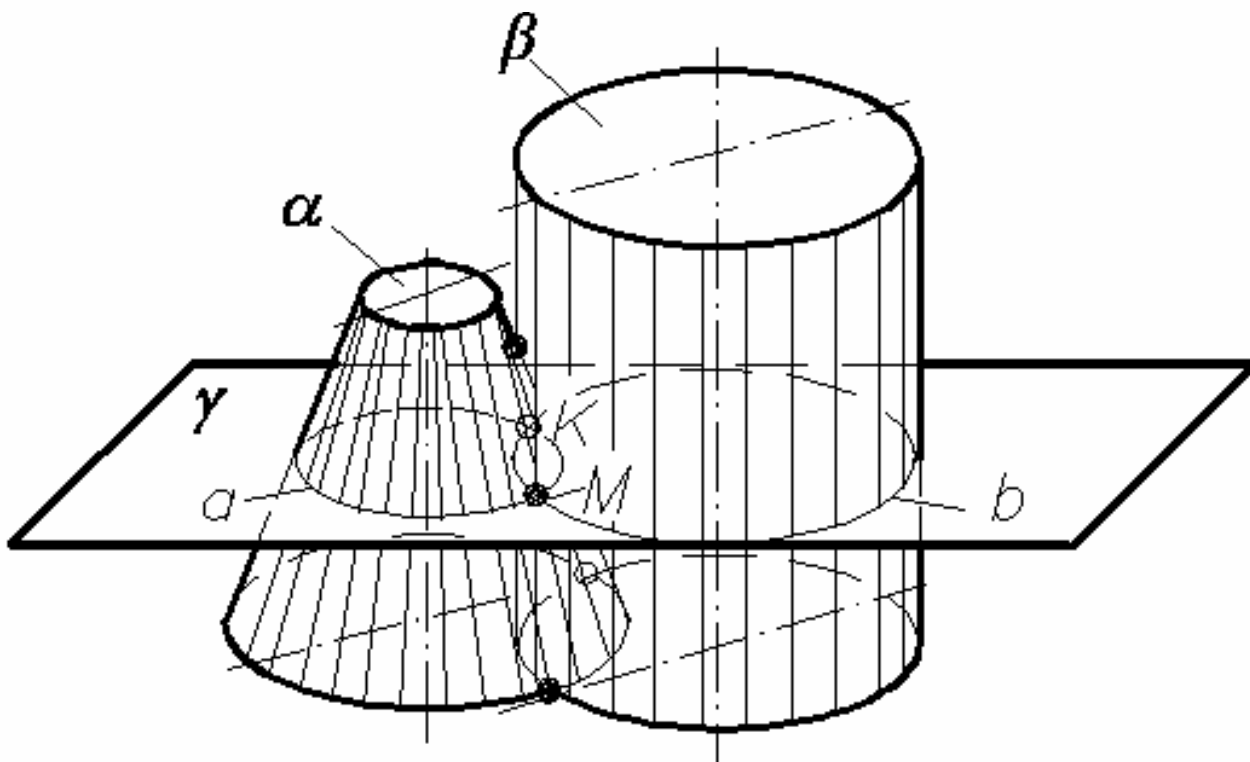


Рис. 9.1

Следует выбирать поверхности-посредники так, чтобы они давали графически простые линии пересечения с заданными поверхностями (например, прямые или окружности).

В приведенном выше алгоритм не оговариваются вид, расположение и способ задания поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$ , поэтому он является обобщенным и пригодным для решения задач по определению линии пересечения любых поверхностей.

В качестве вспомогательных поверхностей при определении линии пересечения обычно используют плоскости и сферы.

## 9.1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**Линия пересечения гранных поверхностей** представляет собой одну или несколько замкнутых ломаных линий и определяется с помощью вспомогательных секущих плоскостей двумя способами.

1. находят линии пересечения **граней** одного тела с **гранями** другого, т.е. сводят задачу к нахождению линии пересечения **двух плоскостей**;
2. находят точки пересечения **ребер** одного многогранника с **гранями** другого. При этом задача сводится к нахождению точек встречи **прямой и плоскости**.

Рассмотрим построение линии пересечения прямой и наклонной призм (рис.9.2.1).

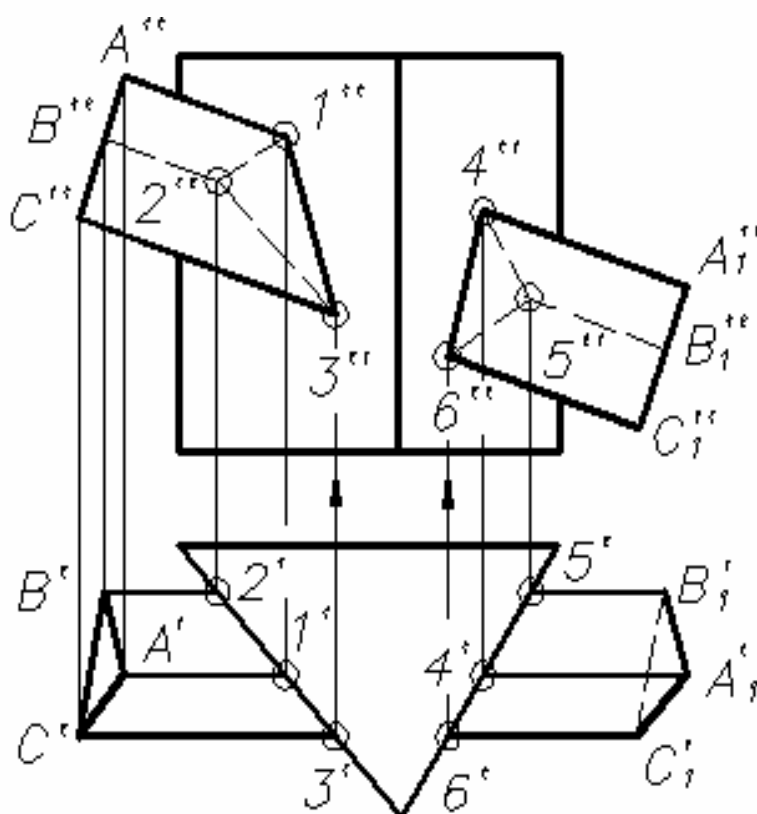
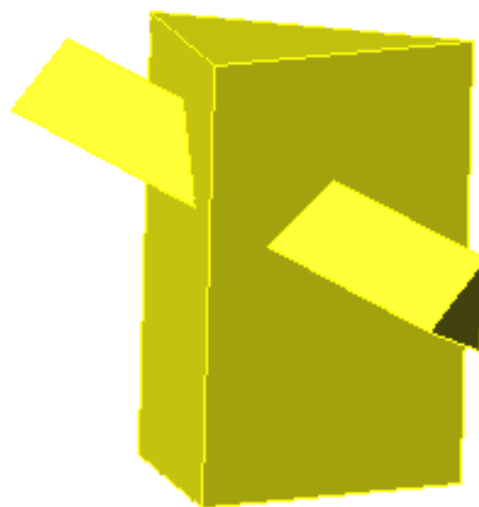


Рис. 9.2.1



Прежде, чем приступить к построениям, анализируют взаимное положение многогранников и их расположение относительно плоскостей проекций. В данном случае очевидно, что наклонная призма пересекает только боковые грани прямой призмы. Нижнее и верхнее основания последней параллельны горизонтальной плоскости проекций, а боковые грани представляют собой горизонтально-проецирующие плоскости. Эти особенности расположения призм определяют наиболее рациональный способ построения линии пересечения их поверхностей по точкам пересечения ребер наклонной призмы с гранями прямой призмы. Находим горизонтальные проекции точек: ребро  $AA_1$  пересекает грани прямой призмы в точках  $1'$  и  $4'$ ; ребро  $BB_1$  – в точках  $2'$  и  $5'$ ; ребро  $CC_1$  – в точках  $3'$  и  $6'$ .

Положение точек на фронтальной плоскости проекций определяется по линиям связи, проведенным от соответствующих точек с горизонтальной плоскости проекций. Соединим полученные точки и получим следующие линии: в грани  $ABA_1B_1$  – линии 1-2 и 4-5, в грани  $ACA_1C_1$  – линии 1-3 и 4-6, в грани  $BCB_1C_1$  – линии 2-3 и 5-6. В завершении определяем видимость линии пересечения, изображая невидимую часть штриховой линией.

Рассмотрим построение линии пересечения трехгранной призмы и пирамиды, представленных на рис. 9.2.

Через какое-либо ребро многогранника проводим проецирующую плоскость. Например,  $\alpha''$  проводим через ребро  $AA_1$  трехгранной призмы. В проекции на  $\Pi_1$  сечение пирамиды представится в виде треугольника (на рис. 9.2 заштрихованного), стороны которого пересекают проекцию  $A'A'_1$  точках  $1'$   $1'_1$ , являющихся проекциями точек пересечения 1 и  $1_1$  ребра  $AA_1$  призмы с гранями  $ESD$  и  $DSF$  пирамиды. Затем эти точки проецируем на  $\Pi_2$ . Проведя подобные операции с другими ребрами призмы, получим остальные точки встречи ребер призмы и граней пирамиды ( $2, 2_1$  и  $3, 3_1$ ). Поскольку точки 1, 2 и 3 лежат на одной грани  $ESD$  пирамиды, соединим их между собой с учетом видимости ломаной, являющейся одной из двух замкнутых линий, на которые распадается линия пересечения двух многогранников. Другая замкнутая линия проходит через две грани, поэтому для ее проведения необходимо предварительно определить точки пересечения ребра  $SF$  пирамиды с гранями  $AA_1CC_1$  и  $BB_1CC_1$  призмы. С этой целью через  $SF$  проведем фронтально проецирующую плоскость  $\beta''$ .

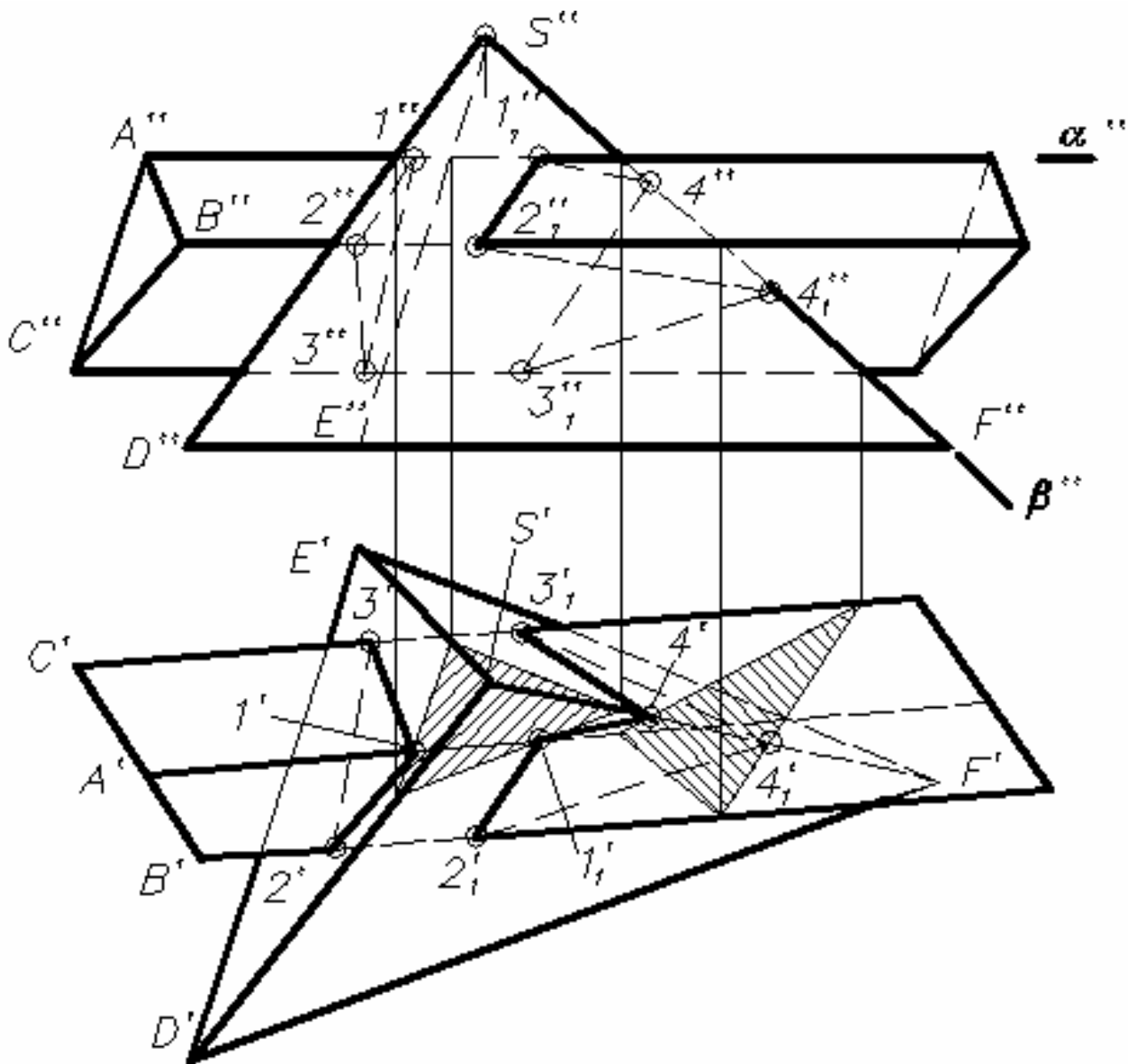


Рис. 9.2

Горизонтальной проекцией сечения призмы этой плоскостью будет треугольник (на рис. 9.2 заштрихован), стороны которого пересекают ребро в точках  $4'$  и  $4'_1$ . Полученные точки представляют собой горизонтальные проекции искомым точек встречи 4 и  $4_1$ . Последовательно соединяем между собой точки  $1_1, 2_1, 4_1, 3_1$  и  $4$  с учетом видимости. В результате получим две проекции другой ломаной линии.

## 9.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАННОЙ И КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Для построения линии пересечения используются рассмотренные ранее способы построения линии пересечения **криволинейной поверхности с плоскостями** (гранями многогранника) и с **прямыми** (ребрами многогранника). Каждая из граней заданного многогранника является плоскостью общего положения, которая пересекает криволинейную поверхность по эллиптической кривой.

Рассмотрим построение линии пересечения треугольной призмы и прямого кругового конуса (рис. 9.3).

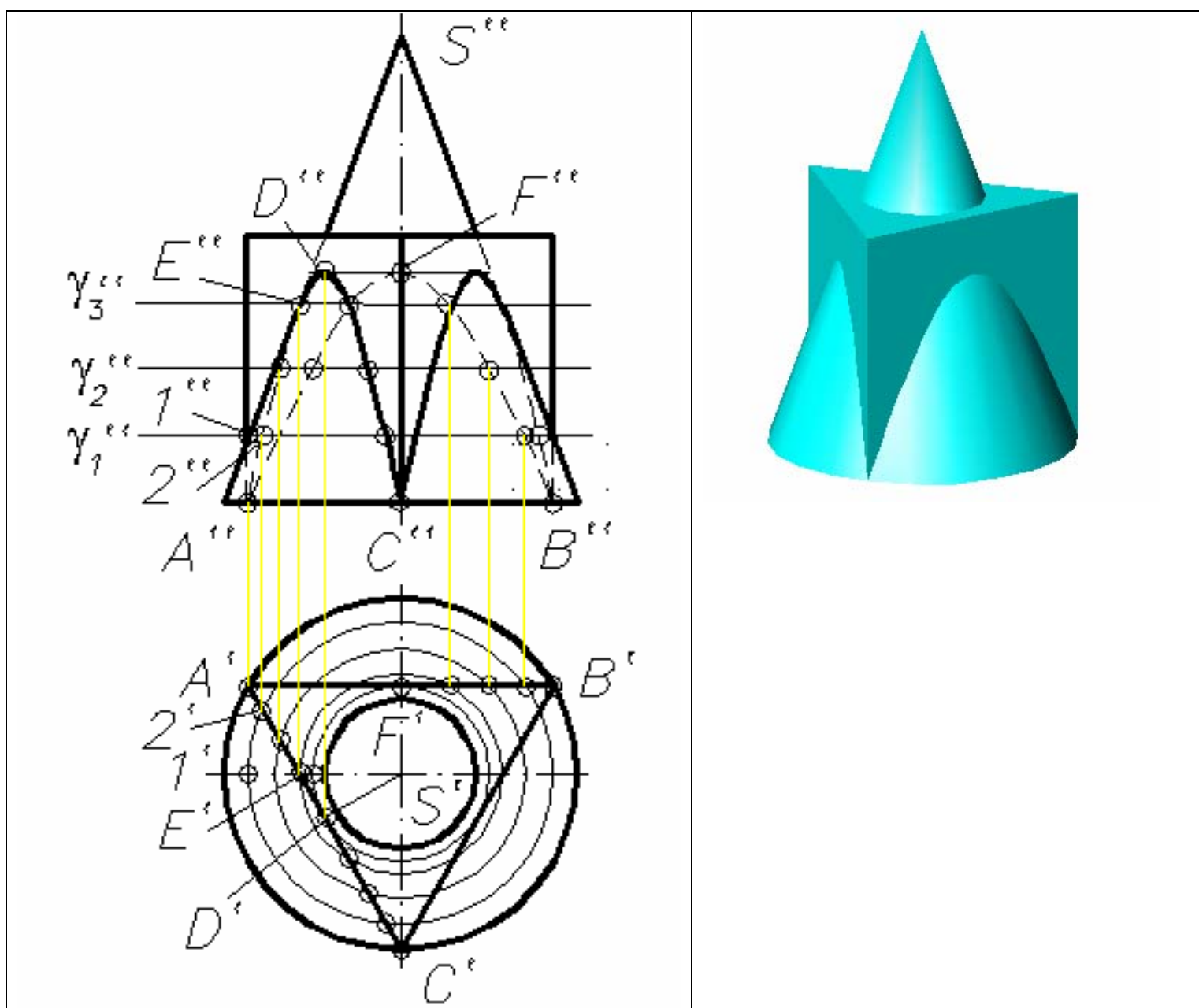


Рис. 9.3

Все грани призмы представляют собой фронтально-проецирующие плоскости, вследствие чего все горизонтальные проекции точек пересечения будут находиться на сторонах треугольника  $A^rB^rC^r$ . В качестве вспомогательных плоскостей здесь удобно использовать горизонтальные плоскости уровня.

Линия сечения призмы представляет собой треугольник, а конуса – окружность (на разной высоте окружности будут иметь разные радиусы). Точками линии пересечения двух поверхностей являются точки пересечения окружности и треугольника.

Выберем произвольную секущую плоскость  $\gamma_1''$ . Радиус окружности сечения конуса определится фронтальной проекцией  $1''$  точки пересечения 1 секущей плоскости с образующей конуса. Проведя на плоскости проекций П1 окружность радиуса  $S'1'$  до пересечения со стороной  $A'C'$  треугольника  $A'B'C'$ , получим горизонтальную проекцию  $2'$  точки пересечения двух поверхностей 2. Проецируя точку 2 на секущую плоскость  $\gamma_1''$ , получим ее фронтальную проекцию  $2''$ .

Повторяем проделанную операцию необходимое число раз. В результате на фронтальной плоскости проекций получим ряд точек. Соединяя их в определенной последовательности, получим фронтальную проекцию линии пересечения первой грани призмы с поверхностью конуса. Следует помнить, что в данном случае ее горизонтальная проекция будет лежать на прямой  $A'C'$ , поскольку поверхность призмы является горизонтально-проецирующей.

При построении линии пересечения особое внимание следует обращать на определение положения опорных точек (граничные точки, точки видимости и т.д.). Самая верхняя точка  $D''$  фронтальной проекции линии пересечения будет располагаться ближе всех остальных к оси вращения конуса. Для ее определения на плоскости П1 проводится окружность, касательная к горизонтальной проекции  $A'C'$  грани призмы, а из вершины конуса проводится перпендикуляр  $S'D'$  к стороне  $A'C'$ . Высоту расположения точки D на фронтальной плоскости проекций определим спроецировав касательную окружность на фронтальную проекцию конуса. Точка видимости E лежит на пересечении очерковой (крайней) образующей конуса с гранью призмы. Горизонтальная проекция  $E'$  этой точки определяется из чертежа, а фронтальная –  $E''$  лежит на пересечении линии связи, проведенной из  $E'$ , с очерковой образующей. Ниже этой точки линия пересечения переходит на невидимую со стороны наблюдателя часть поверхности конуса. Положение опорных точек A, B и C очевидно из чертежа.

Линия пересечения поверхностей двух фигур **распадается на три части** по числу граней пирамиды. Две ее части, лежащие на передних гранях, симметричны. Третья представляет собой **гиперболу** и лежит на невидимой стороне конуса. При ее построении можно использовать проведенные ранее плоскости-посредники. Определение верхней опорной точки  $F''$  аналогично определению точки  $D''$ .

### 9.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Метод построения линий пересечения поверхностей тел заключается в проведении вспомогательных секущих плоскостей и нахождении отдельных точек линий пересечения данных поверхностей в этих плоскостях.

Построение линии пересечения поверхностей тел начинают с нахождения характерных точек, например, верхней и нижней, крайних справа и слева, либо отделяющих видимую часть линии от невидимой и т.д. Все остальные точки пересечения называются промежуточными. В качестве вспомогательных плоскостей выбирают такие плоскости, которые пересекают обе заданные поверхности по простым линиям – прямым или окружностям, причем окружности должны располагаться в плоскостях, параллельных плоскостям проекций.

Рассмотрим построение линии пересечения двух цилиндрических поверхностей. Пусть оси цилиндров взаимно перпендикулярны и пересекаются между собой (рис.9.3.1).

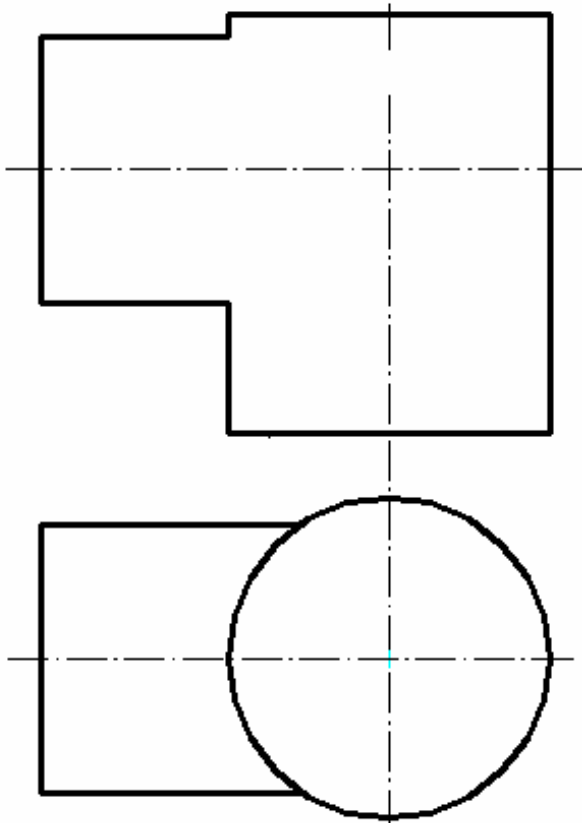


Рис. 9.3.1 (условие задачи)

Назовем для краткости цилиндр с горизонтально расположенной осью малым цилиндром и цилиндр с вертикально расположенной осью – большим цилиндром.

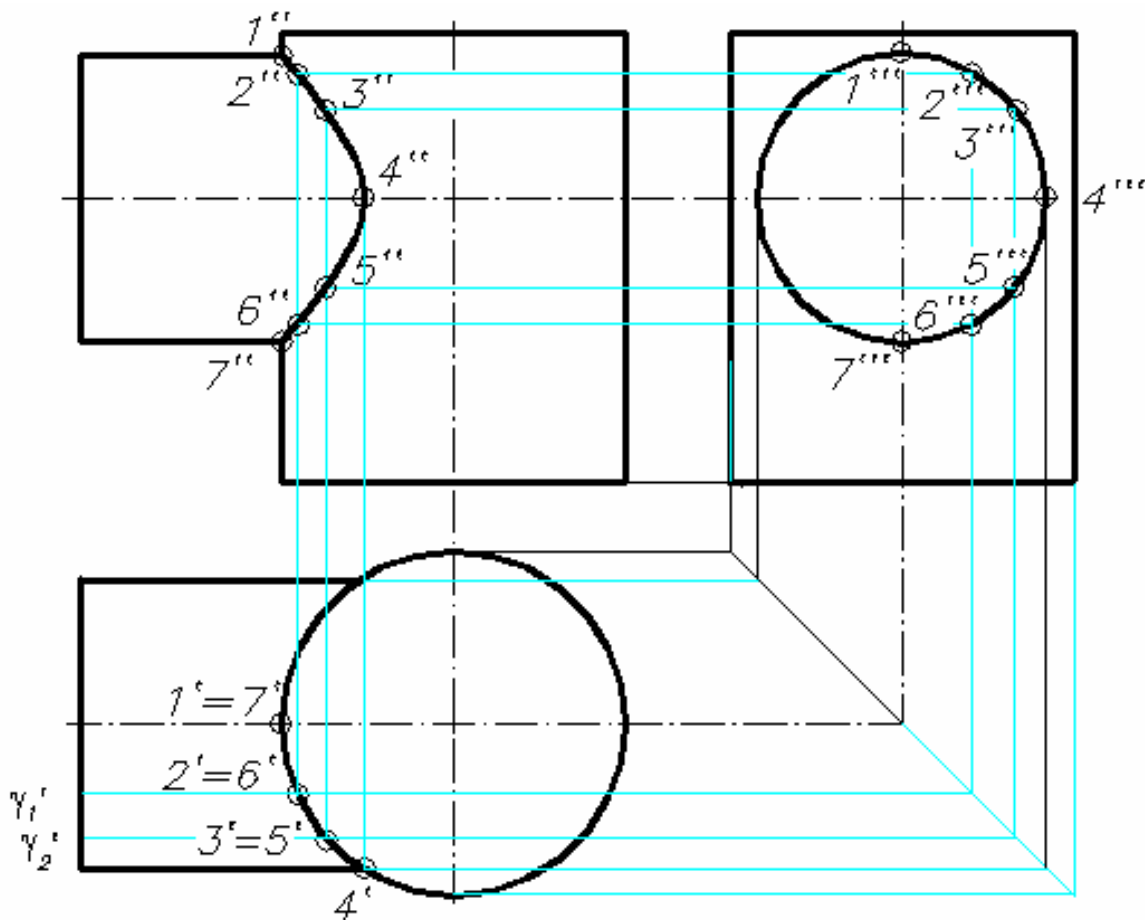


Рис. 9.3.2 (решение)

Из рисунка видно, что в области взаимного пересечения поверхностей данных цилиндров точки этих поверхностей расположены симметрично относительно фронтальной и профильной плоскостей, проходящих через ось малого цилиндра. Из этого следует, что:

- 1 – горизонтальная проекция линии пересечения должна совпадать с горизонтальной проекцией окружности основания малого цилиндра;
- 2 – фронтальная проекция линии пересечения должна быть симметрична относительно фронтальной проекции профильной плоскости симметрии;
- 3 – видимая и скрытая части искомой линии на фронтальной проекции должны совпадать между собой.

Проекции точек 1 и 7 могут быть получены без дополнительных построений, как проекции ( $1'$ ,  $1''$ ,  $1'''$ ,  $7'$ ,  $7''$ ,  $7'''$ ) точек пересечения образующих, лежащих в общей (фронтальной) плоскости симметрии цилиндров.

Точка 4, являющаяся характерной точкой, также находится непосредственно из чертежа, по линиям связи ( $4'$ ,  $4''$ ,  $4'''$ ).

Для построения остальных точек на линии пересечения могут быть использованы в качестве вспомогательных фронтальные и горизонтальные плоскости. На рис. 9.3.2 применены фронтальные плоскости. Такие плоскости пересекают и большой и малый цилиндры по образующим. Например, чтобы найти точки 2 и 6 нужно провести вспомогательную плоскость  $\gamma_1 \parallel \Pi_2$  (выбор положения секущей плоскости произвольный). На пересечении образующих цилиндров находим проекции точек  $2'$ ,  $2''$ ,  $2'''$  и  $6'$ ,  $6''$ ,  $6'''$ . Аналогичным образом находятся точки 3 и 5 с помощью вспомогательной плоскости  $\gamma_2$ . Полученные точки соединяются плавной линией.

Теперь рассмотрим построение линии пересечения на геометрическом теле, представляющем собой прямой круговой конус со сквозным цилиндрическим отверстием, ось которого перпендикулярна оси вращения конуса (рис. 9.4.1).

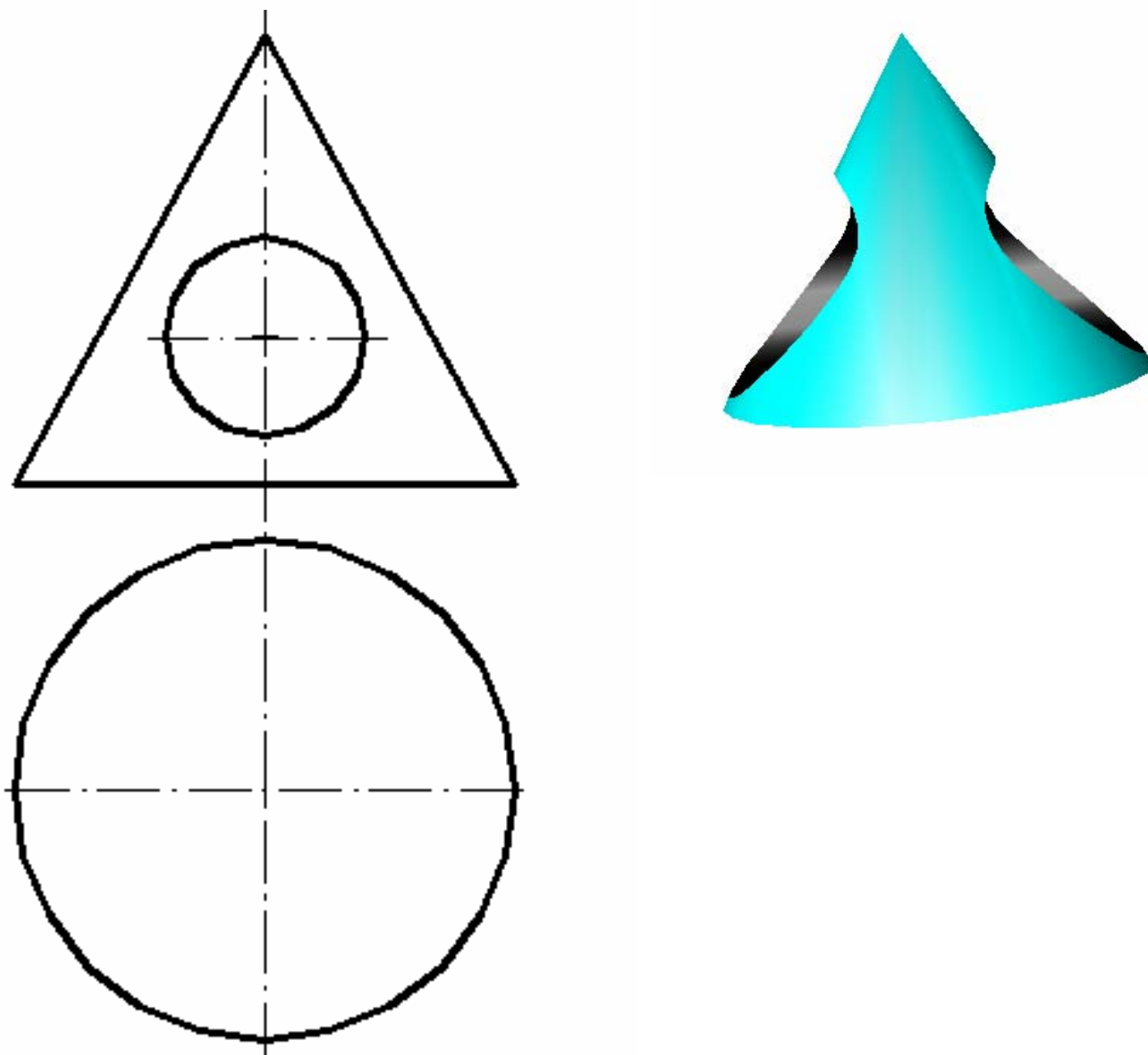


Рис. 9.4.1

В качестве вспомогательных секущих плоскостей выбираем горизонтальные секущие плоскости  $\gamma_1 - \gamma_5$  (рис. 9.4.2), пересекающие конус по окружностям, которые проецируются на горизонтальную плоскость проекций без искажения. Цилиндр пересекается этими плоскостями по прямым линиям – образующим. Точки пересечения горизонтальных проекций окружностей – сечений конуса, и образующих цилиндра будут горизонтальными проекциями точек искомой линии пересечения.



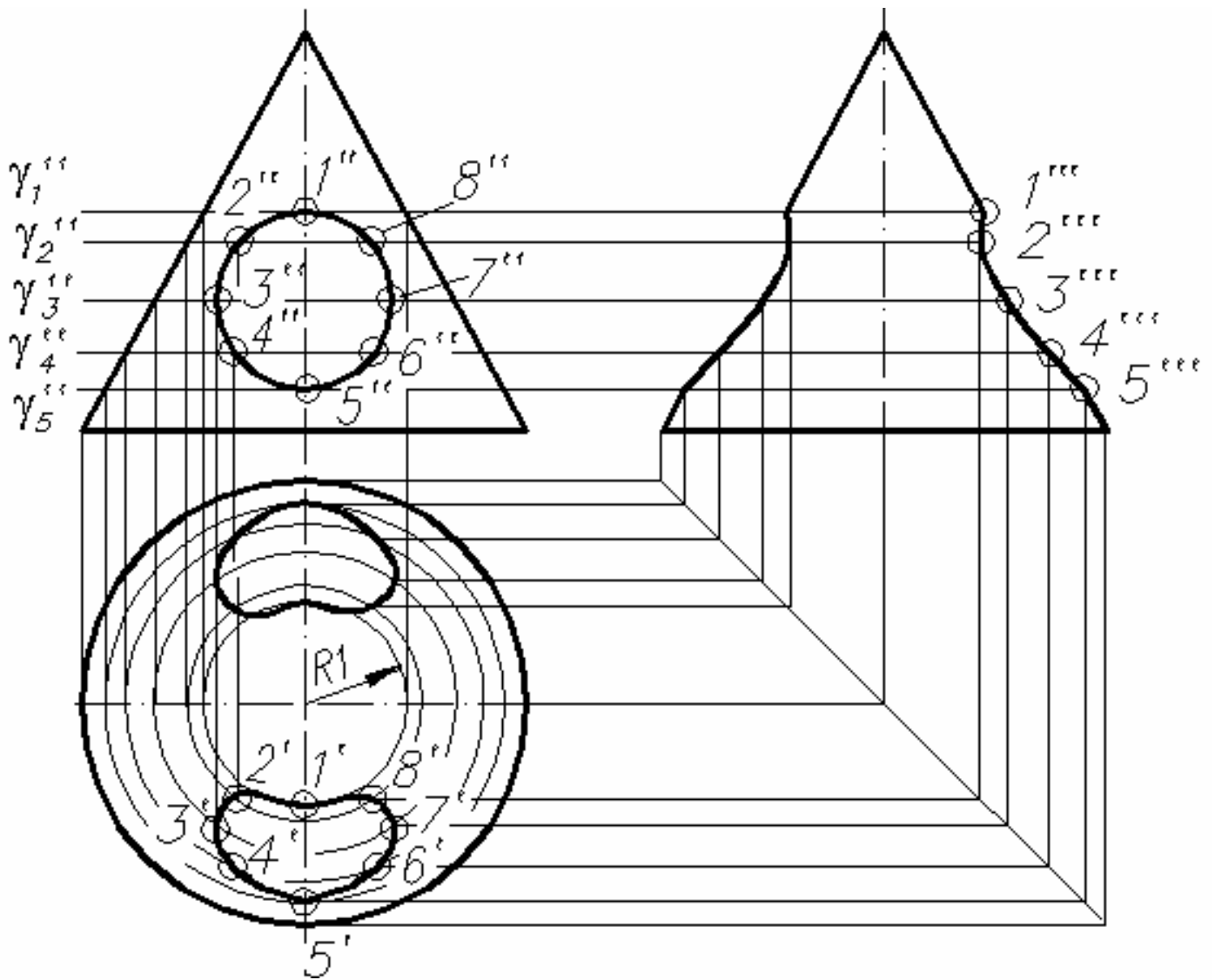


Рис. 9.4.2

Самая верхняя точка линии пересечения – точка 1 – определяется с помощью вспомогательной плоскости  $\gamma_1$ , которая пересекает конус по окружности радиуса  $R_1$ . Горизонтальная проекция точки  $1'$  находится на пересечении этой окружности с вертикальной осью конуса.

Самая нижняя точка линии пересечения – точка 5 – определяется с помощью вспомогательной плоскости  $\gamma_5$ .

Крайние точки линии пересечения 3 и 7 находятся с помощью секущей плоскости  $\gamma_3$ . Плоскости  $\gamma_2$  и  $\gamma_4$  позволяют получить промежуточные точки 2, 4, 6 и 8.

После того, как будут получены все точки линии пересечения на горизонтальной и фронтальной плоскостях проекций, проводим линии связи на профильную проекцию геометрического тела и строим профильные проекции точек пересечения  $1''' - 8'''$ .

Так как цилиндрическое отверстие сквозное, то на противоположной стороне конуса будет располагаться зеркальное изображение линии пересечения, которое строится с помощью тех же секущих плоскостей  $\gamma_1 - \gamma_5$ .

Полученные точки на горизонтальной и профильной проекциях соединяют плавными линиями.

#### 9.4. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ. МЕТОД СФЕР

Соосные поверхности вращения (поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям. Проекция этих окружностей на плоскость, параллельную оси вращения, вырождаются в прямые линии. На рис. 9.5, а, б и в. изображены соосные цилиндр и сфера, конус и сфера, цилиндр и конус.

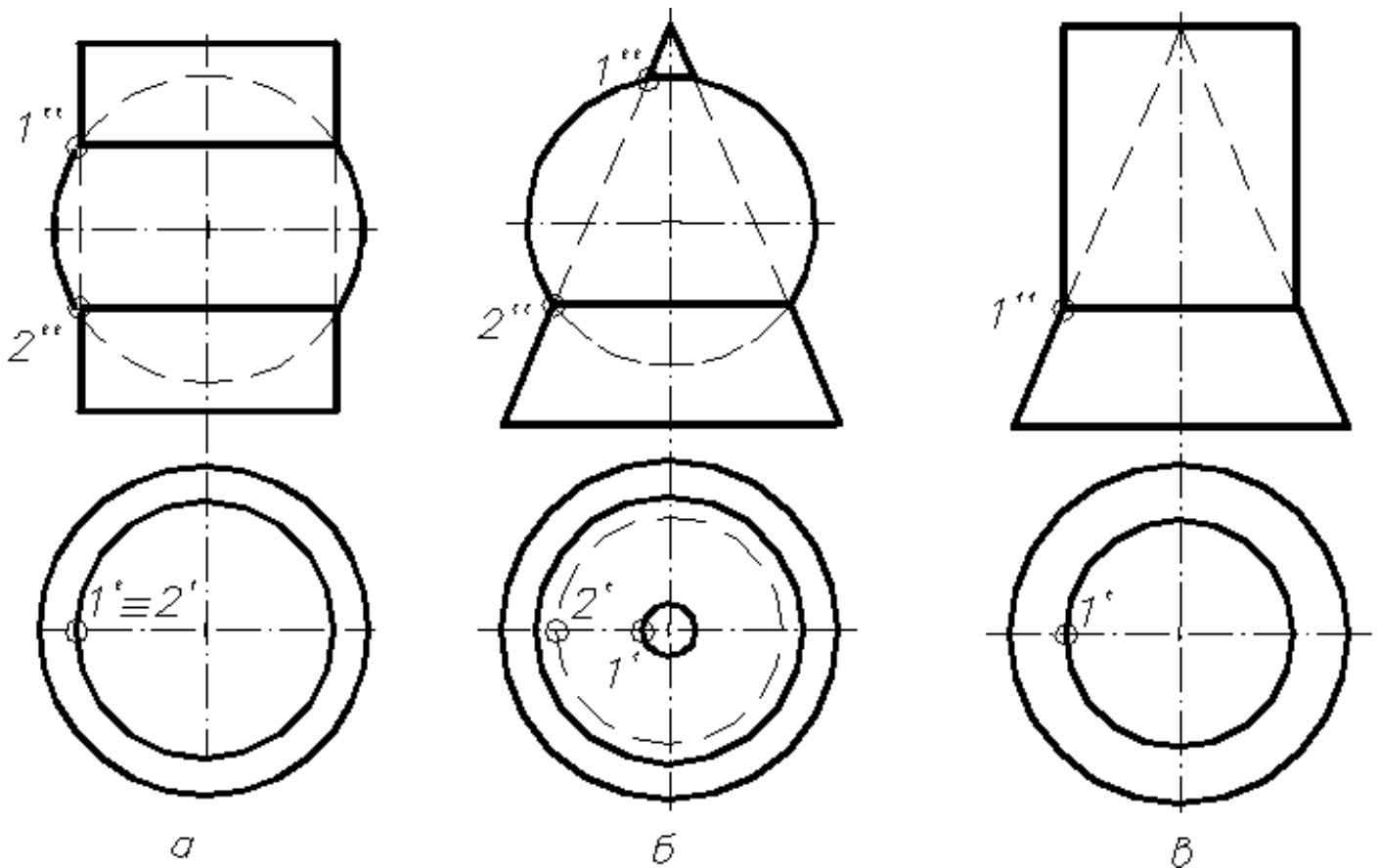


Рис. 9.5.

Особенности пересечения соосных поверхностей вращения позволяют в качестве посредника при построении линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями использовать **секущие сферы**. Вспомогательная сфера проводится из точки пересечения осей поверхностей и пересекает каждую из них по окружностям. Точки пересечения этих окружностей – общие для обеих поверхностей, т.е. принадлежат линии их пересечения. Такой метод построения носит название **метода вспомогательных концентрических сфер**. Используют его тогда, когда нельзя применить метод вспомогательных секущих плоскостей по той причине, что они не дают графически простых линий при пересечении поверхностей.

Метод вспомогательных сфер можно применять и в случае, когда оси поверхностей тел вращения не пересекаются. Тогда вводят эксцентрические сферы, центр каждой из которых располагается на соответствующей оси вращения.

На рис. 9.6. показано построение линии пересечения конуса и цилиндра вращения методом вспомогательных сфер. Оси вращения этих поверхностей пересекаются в точке  $O$  ( $O''$ ) и параллельны фронтальной плоскости проекций. Из точки  $O''$  проводят концентрические сферы, пересекающие поверхности по **окружностям**, которые вырождаются на плоскости проекций  $\Pi_2$  в **прямые линии**. Точки пересечения этих линий являются точками пересечения поверхностей. Так, на рис. 9.6. сфера радиуса  $R$  пересекается с цилиндром по линии  $m$  ( $m''$ ), которая представляет собой окружность, перпендикулярную фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций. Эта же сфера пересекается с конусом по линии  $n$  ( $n''$ ), которая представляет собой окружность, параллельную горизонтальной плоскости проекций. На пересечении этих линий находится точка  $3$  ( $3''$ ), которая принадлежит линии пересечения конуса и цилиндра..

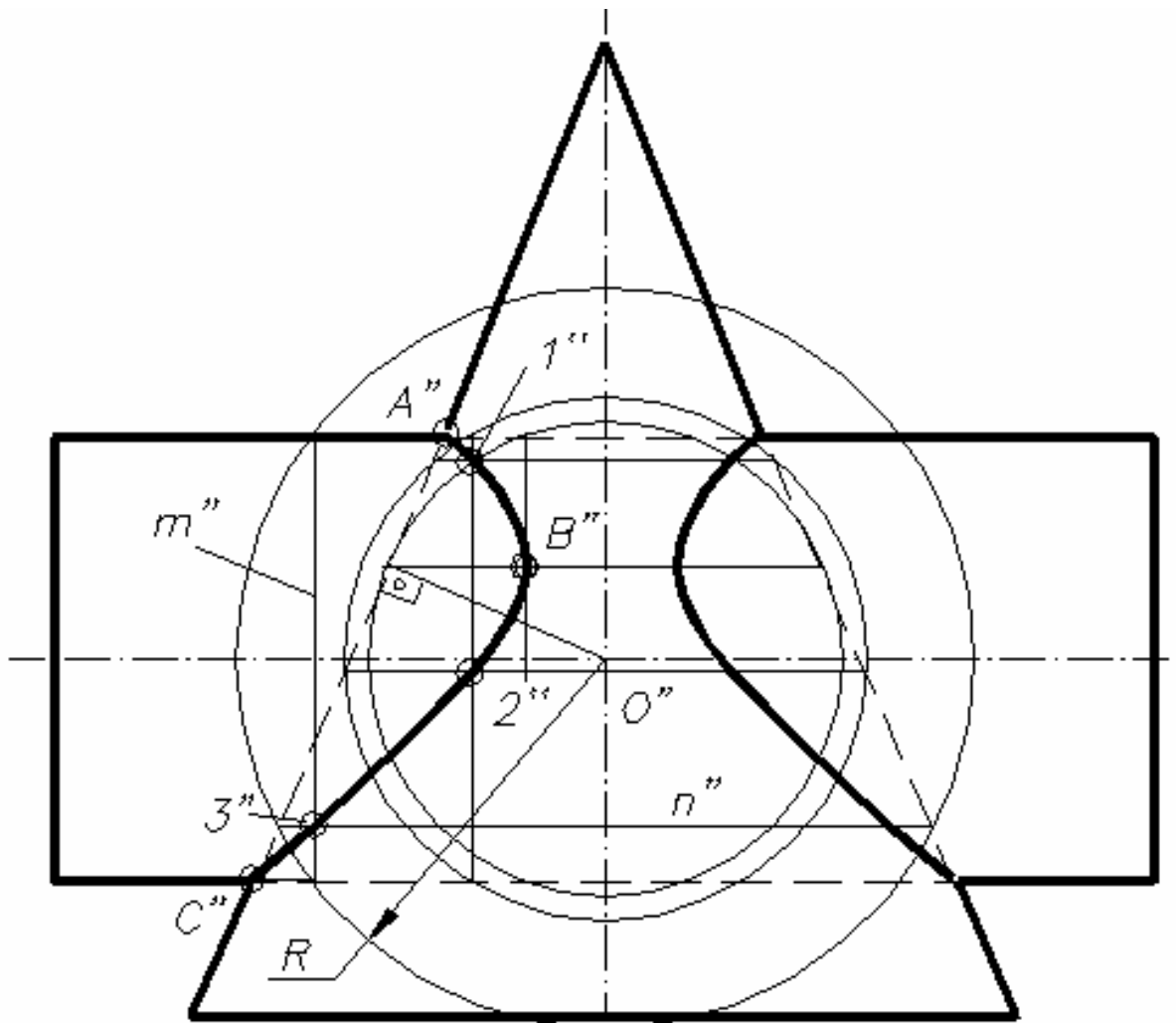


Рис. 9.6.

Аналогичным образом находят точки 1 ( $1''$ ) и 2 ( $2''$ ). Точка В ( $B''$ ) является характерной. Она строится с помощью сферы, касательной к образующим конуса. Точки А ( $A''$ ) и С ( $C''$ ) отмечаются на чертеже без дополнительных построений. Полученные точки соединяются плавной кривой линией.

В частном случае, когда пересекающиеся поверхности вращения второго порядка описаны вокруг **общей сферы**, линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Это положение формулируется **теоремой Монжа**: если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка.

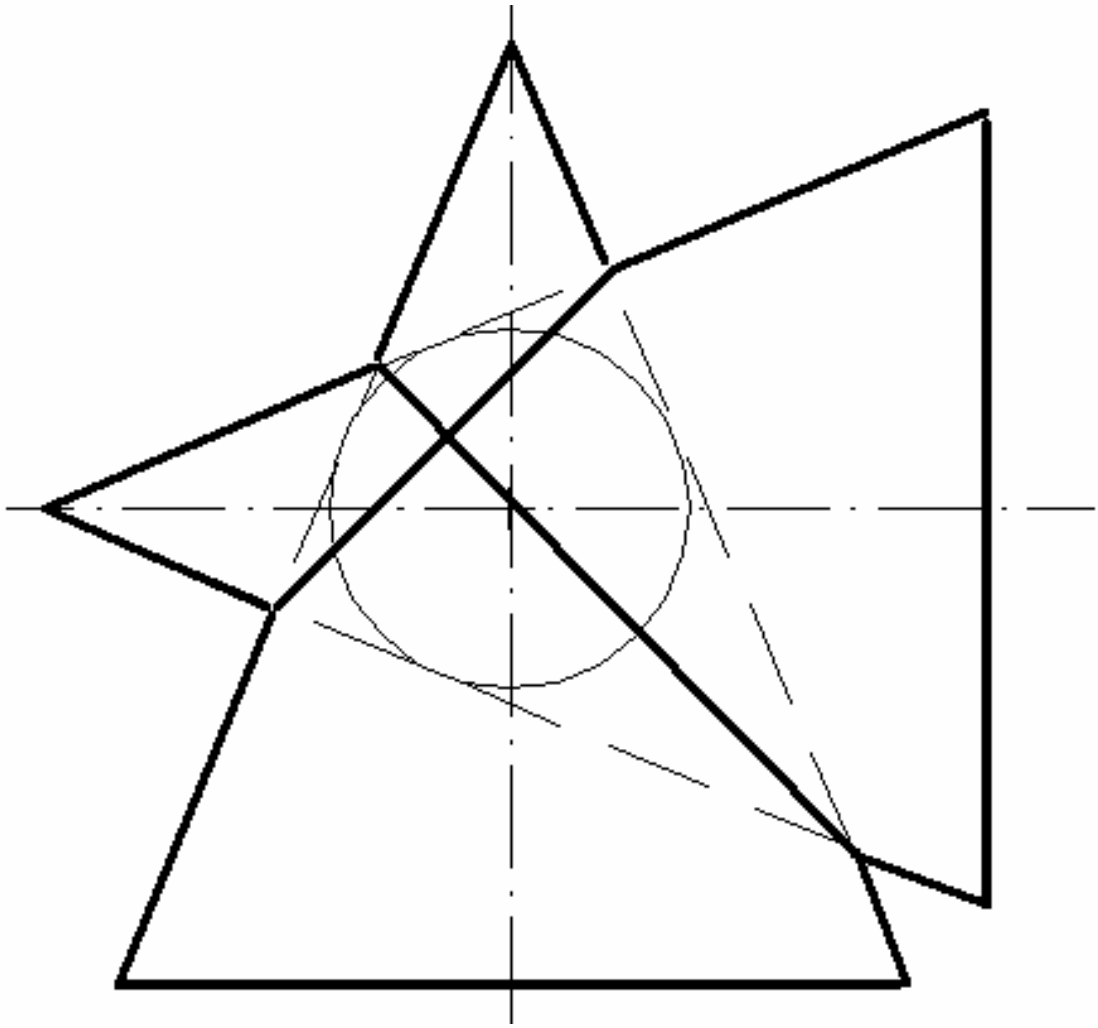


Рис. 9.7.

На рис. 9.7 приведен пример, где пересекаются поверхности вращения (два конуса), описанные вокруг общей сферы. Здесь пересечение происходит по эллипсам, которые на данной проекции вырождаются в прямые линии.

На рис. 9.8 показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися под прямым углом осями. Из точки пересечения осей проведена сфера, равная диаметру цилиндров. Обе поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов.

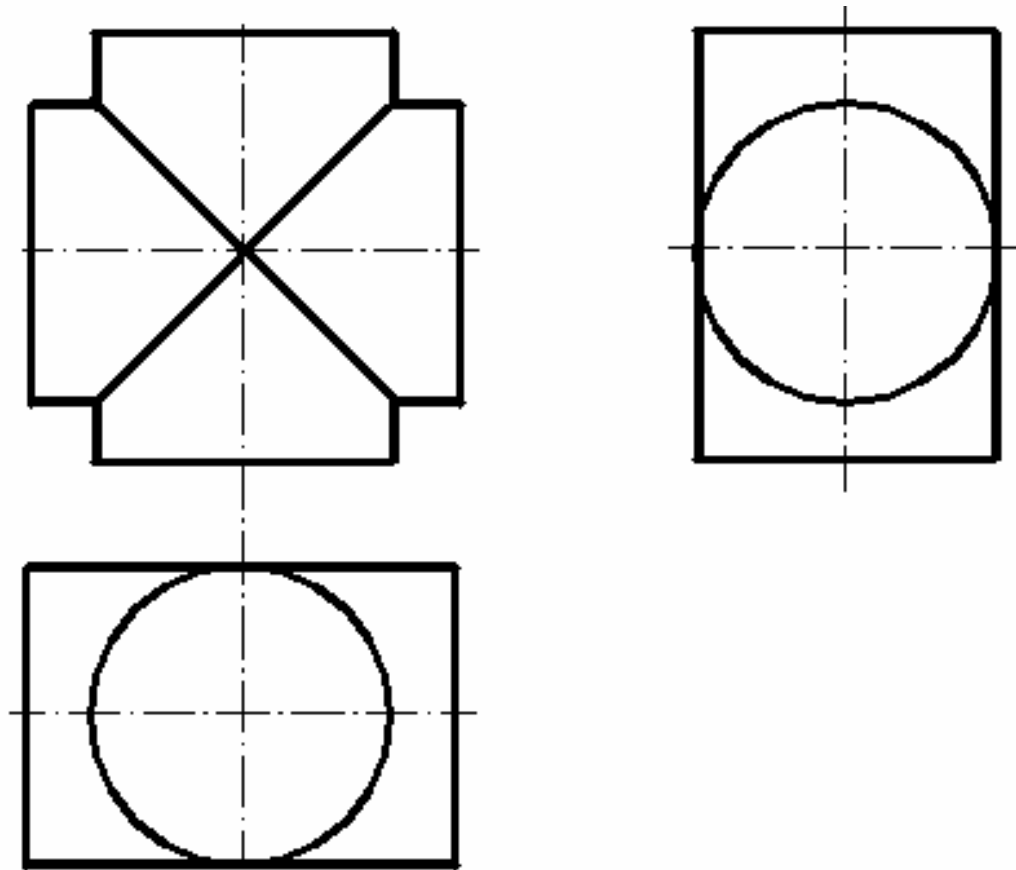


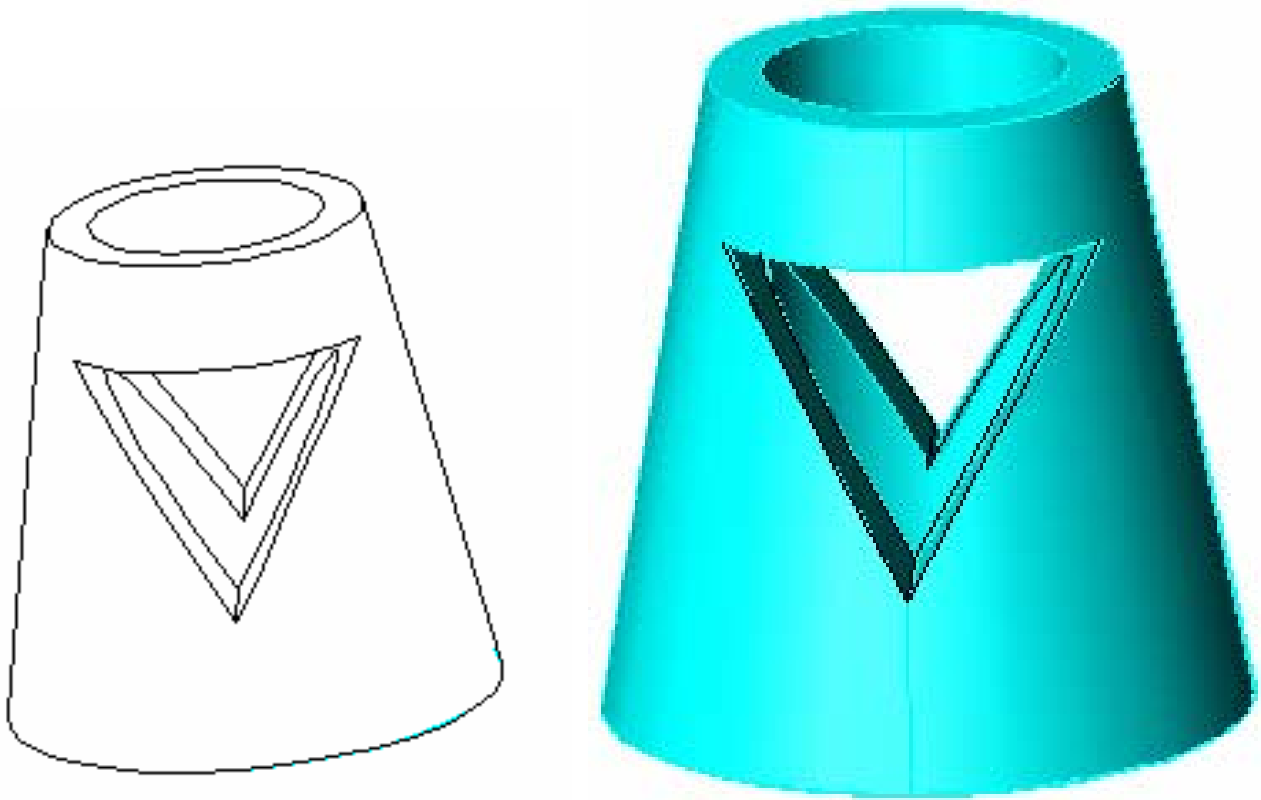
Рис. 9.8.

### 9.5. ДВОЙНОЕ ПРОНИЦАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Если полое геометрическое тело имеет сквозное боковое отверстие, то в этом случае необходимо строить линии пересечения трех поверхностей, т.е. происходит так называемое двойное проницание поверхностей.

Рассмотрим полое коническое тело со сквозным боковым призматическим отверстием (рис. 9.9). Требуется построить три проекции заданного тела и определить линию пересечения отверстия с наружной и внутренней поверхностями полого тела.

Решение начинается с анализа получающихся линий пересечения и проводится в три этапа: а) построение линии пересечения поверхности отверстия с наружной поверхностью



геометрического тела; б) определение линии пересечения поверхности отверстия с внутренней поверхностью полого геометрического тела; в) построение необходимых разрезов.

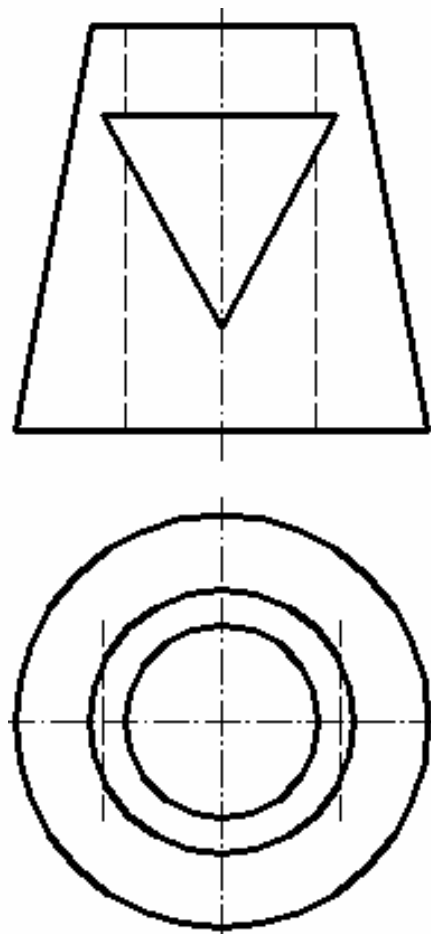


Рис. 9.9, а (условие задачи)

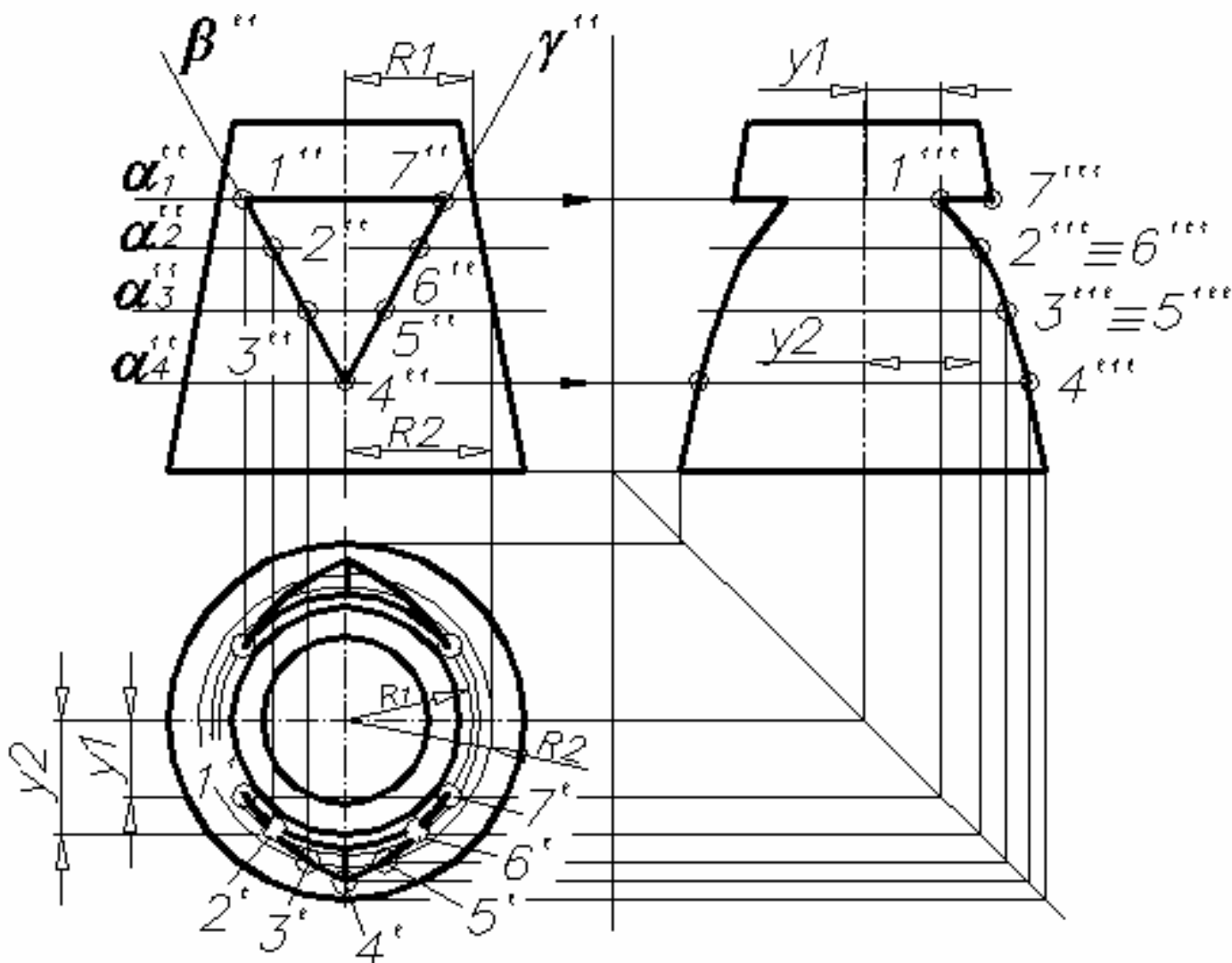


Рис. 9.9, б

Рассмотрим решение задачи по этапам.

**Первый этап** (рис. 9.9, б). Построить линию пересечения внешней конической поверхности с призматическим отверстием. Верхняя горизонтальная грань призмы – плоскость  $\alpha_1$  пересекает конус по дугам окружности радиуса  $R_1$ . Эти дуги ограничены точками 1 и 7 и проецируются на виде сверху в натуральную величину. Боковые грани призмы – фронтально-проецирующие плоскости  $\beta$  и  $\gamma$  пересекают конус по дугам эллипсов, которые проецируются на виде спереди отрезками  $1''-4''$  и  $7''-4''$ . Намечают некоторое количество точек  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  на эллипсах сечения и с помощью вспомогательных горизонтальных секущих плоскостей определяют горизонтальные проекции этих точек. Например, точки 3 и 5 найдены проведением вспомогательной плоскости  $\alpha_3$ , пересекающей конус по окружности радиуса  $R_2$ . На виде слева проекции линии пересечения построены с использованием координат  $y$  соответствующих точек.

**Второй этап** (рис. 9.10). Построить линию пересечения треугольной призмы с внутренней цилиндрической поверхностью.

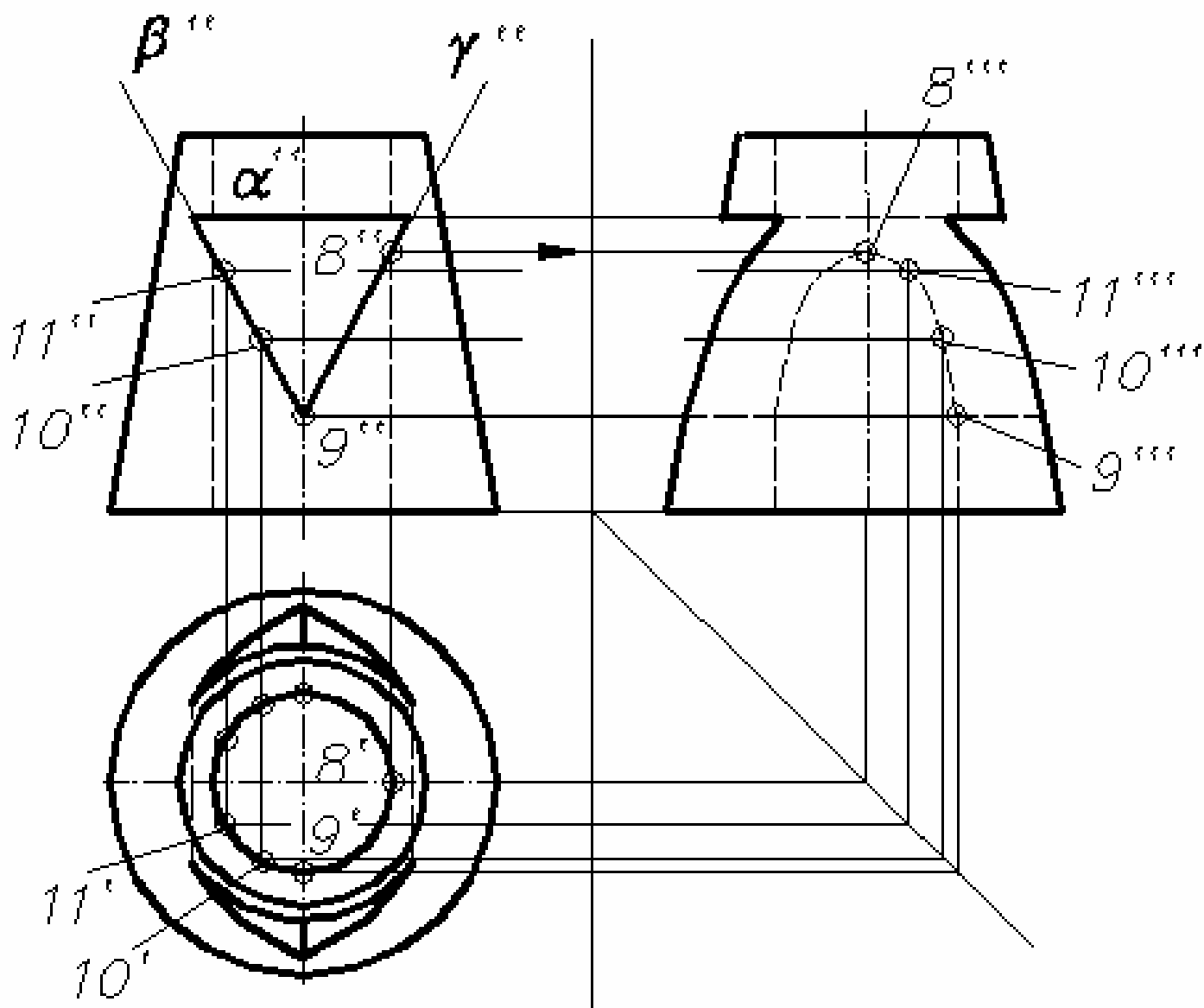


Рис. 9.10

Горизонтальная плоскость  $\alpha$  пересекает внутренний цилиндр по полной окружности, равной окружности диаметра цилиндра. Фронтально-проецирующие плоскости  $\beta$  и  $\gamma$  пересекают цилиндр по эллипсам (каждая из плоскостей дает половину эллипса). Величина большой полуоси эллипса равна отрезку  $8'' - 9''$ , а малая ось по величине равна диаметру цилиндра. Далее определяют проекцию точки  $\delta$  на виде слева, и по большой и малой осям способом, известным из геометрического черчения, строят проекцию эллипса.

На рис. 9.10 показано, что точки, принадлежащие эллипсу, могут быть определены координатным путем по их положению на горизонтальной проекции цилиндра. На этом же рисунке дано построение горизонтальной и профильной проекций произвольных точек 10 и 11.

**Третий этап** (рис. 9.11) – построение необходимых разрезов. На месте главного вида выполнено сочетание вида с фронтальным разрезом, а на виде слева – сочетание вида с профильным разрезом. Вид и разрез разделяет ось симметрии. Фронтальный и профильный разрезы не обозначены, так как секущие плоскости совпадают с осями симметрии фигуры.



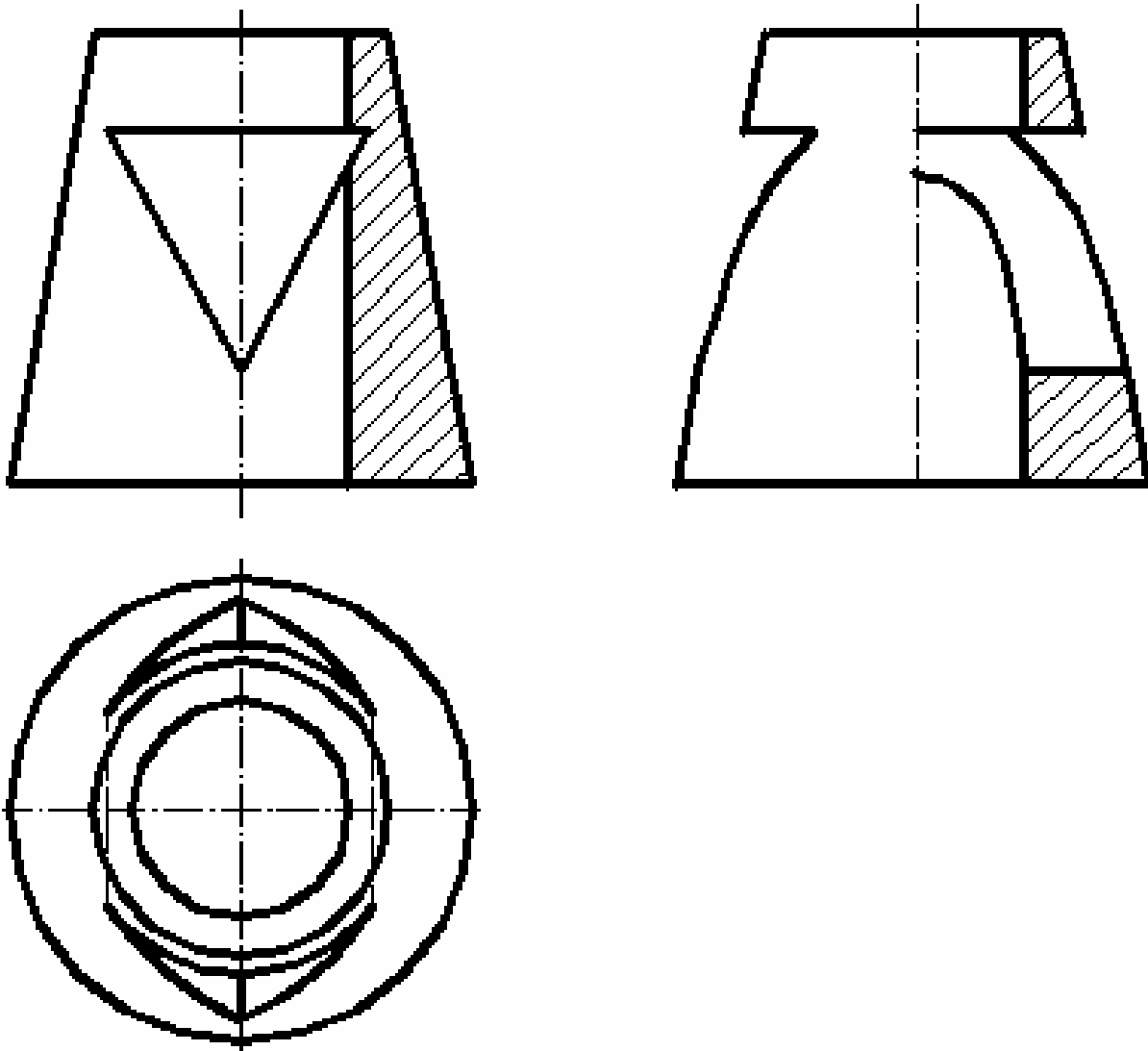


Рис. 9.11

### Контрольные вопросы и задания

1. Как строят линию пересечения двух поверхностей?
2. В чем сущность способа вспомогательных секущих плоскостей при построении линии пересечения двух поверхностей?
3. Каков алгоритм решения задач на определение точек пересечения кривой линии с поверхностью?
4. Каков принцип построения линии пересечения поверхностей, одна из которых занимает проецирующее положение?
5. В каких случаях удобно применять метод секущих сфер?
6. По каким линиям пересекаются соосные поверхности?
7. В чем суть теоремы Монжа?
8. По каким линиям пересекаются два прямых круговых цилиндра одного диаметра, если их оси пересекаются под углом?
9. Постройте линию пересечения двух цилиндров разного диаметра, оси которых пересекаются под углом.