ЛЕКЦИЯ 8

8. КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

8.1. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхности вращения образуются вращением линии l вокруг прямой i − оси вращения. Они могут быть линейчатыми и нелинейчатыми (криволинейными). Определитель поверхности вращения включает образующую l и ось i. Каждая точка образующей описывает при вращении окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Эти окружности называются параллелями. Наибольшую и наименьшую параллели называют соответственно экватором и горлом. Кривые, образующиеся на поверхности вращения в результате пересечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называют меридианами. Точки на поверхности вращения обычно строят с помощью параллелей h и образующих l.

Цилиндр вращения образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i (рис. 8.16, а).

Конус вращения образуется вращением прямой l вокруг пересекающейся с ней оси i (рис. 8.16, б).

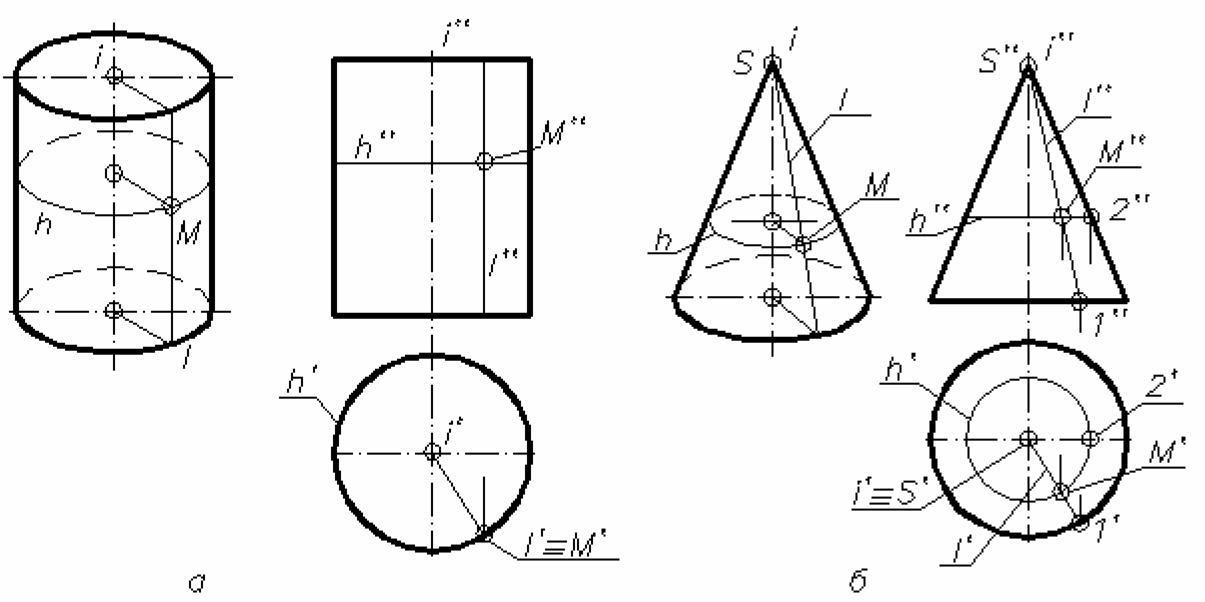
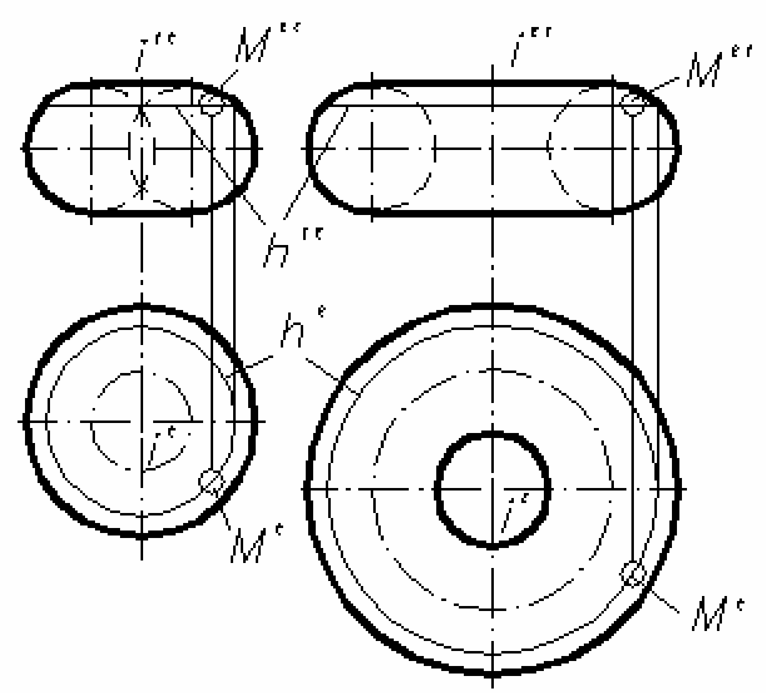


Рис. 8.16

На этом же рисунке показано определение точки M, принадлежащей поверхности цилиндра (рис. 8.16, а), и конуса (рис. 8.16, б).

Приведенные поверхности вращения относятся к классу **линейчатых**.

К **нелинейчатым** поверхностям, образуемым вращением окружности, относятся тор (закрытый и открытый, рис. 8.18) и сфера (рис. 8.20).



а б

Рис. 8.19

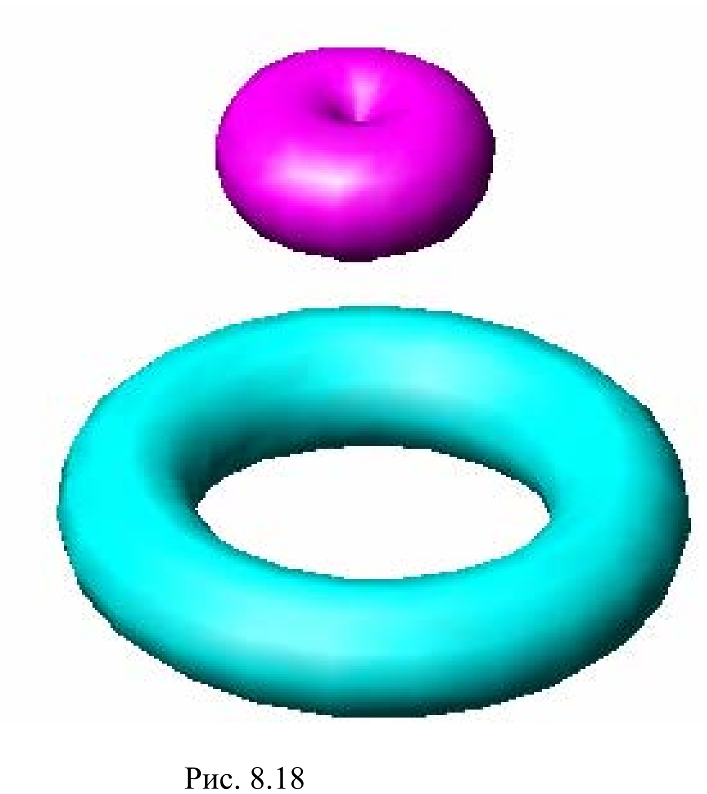


Рис. 8.18

Тор образуется вращением окружности вокруг оси i, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр (рис. 8.19 а, б). При этом, если ось i проходит вне окружности, то тор называется открытым и представляет собой кольцо (рис. 8.18, 8.19, б).

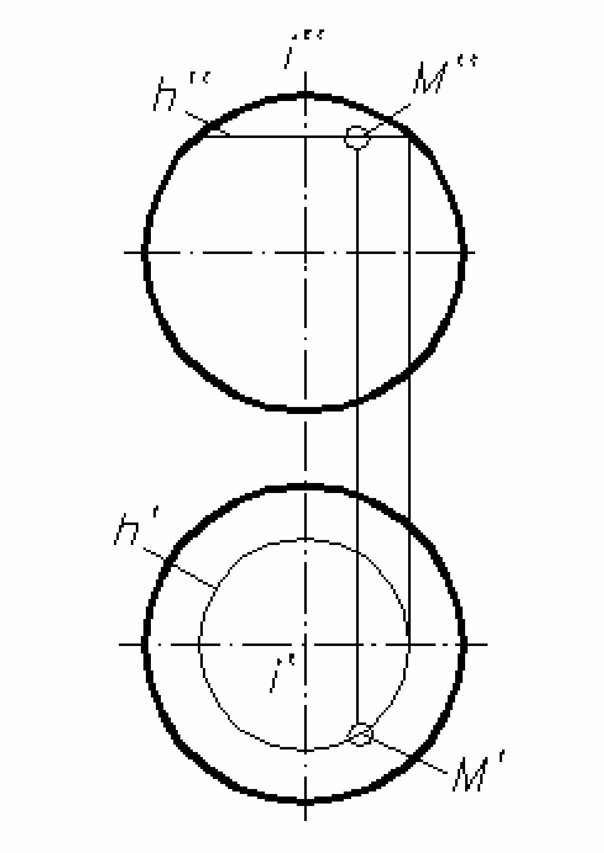


Рис. 8.20

Сфера образуется вращением окружности вокруг ее диаметра (рис. 8.20).
Построение точек на сфере и на торе выполняют с помощью параллелей h. Если нужно найти точку M, принадлежащую поверхности тора или сферы, то через заданную проекцию этой точки проводится проекция параллели h, затем находится вторая проекция этой параллели, после чего на ней с помощью линии связи строится недостающая проекция точки M.
Сфера представляет собой поверхность второго порядка, а тор − четвертого, что соответствует максимальному числу точек пересечения этих поверхностей с прямой линией.

8.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ.

8.2.1. СЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

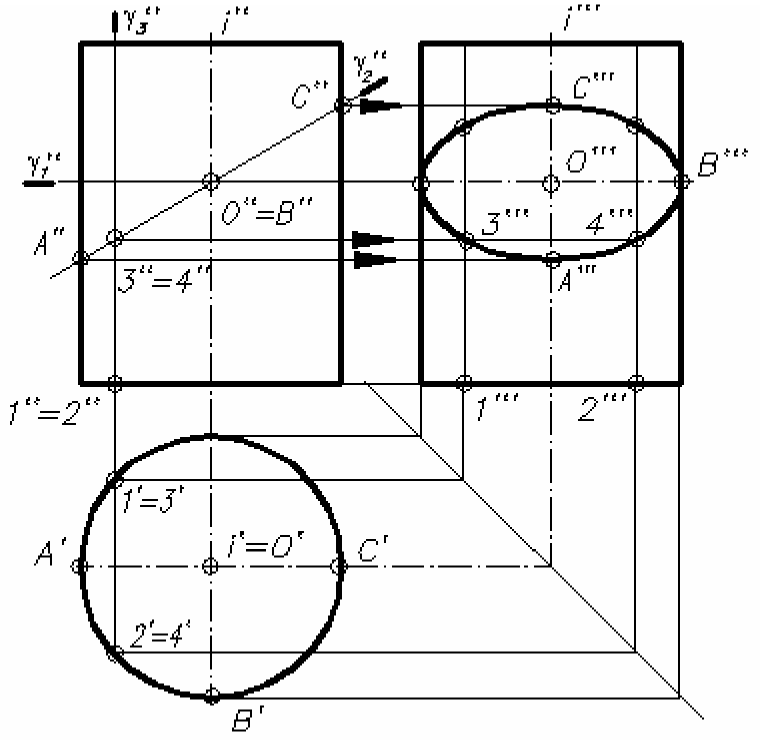


Рис. 8.2

В сечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рис. 8.2):

– **окружность**, если секущая плоскость γ_1'' перпендикулярна оси вращения поверхности;
– **эллипс**, если секущая плоскость γ_2'' не перпендикулярна и не параллельна оси вращения;
– **две образующие прямые**, если секущая плоскость γ_3'' параллельна оси вращения поверхности.

На горизонтальной плоскости проекций окружность и эллипс сечений совпадают с проекцией окружности цилиндра.

При сечении цилиндра плоскостью γ_2 на профильной проекции получится эллипс. Его построение начинают с определения положения опорных точек C''' и A''', которые находятся с помощью линий связи, проведенных из фронтальных проекцийC'' и A''.
К опорным относятся экстремальные точки (высшая и низшая, ближняя и дальняя и т.д.) и точки видимости (проекции этих точек лежат на контурной линии поверхности). Точки видимости разделяют линию пересечения на видимую и невидимую части.
На рис. 8.2. малая ось эллипса равна A'''C''', а большая − диаметру цилиндра. Положение промежуточных точек 3 и 4 можно определить введением вспомогательной секущей плоскости, дающей при пересечении с заданной поверхностью геометрически простые линии. В данном случае в качестве плоскости-посредника удобно выбрать фронтально-проецирующую плоскость γ_1. При сечении цилиндра этой плоскостью на его профильной проекции получим две образующие, положение которых относительно оси определится горизонтальными проекциями 1' и 2' точек 1 и 2, лежащих на основании цилиндра. Пересечение образующих с линией связи, проведенной из точки 3'' ≡ 4'' на фронтальной проекции, даст промежуточные точки 3''' и 4''' на профильной проекции. Повторяя подобную операцию, определим необходимое количество промежуточных точек для построения эллипса. В заключение соединим все точки плавной кривой.

8.2.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРА НЕСКОЛЬКИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Рассмотрим построение линий пересечения прямого кругового цилиндра, в верхней части которого выполнен ступенчатый вырез, а в нижней − призматический сквозной вырез (рис. 8.2.1).

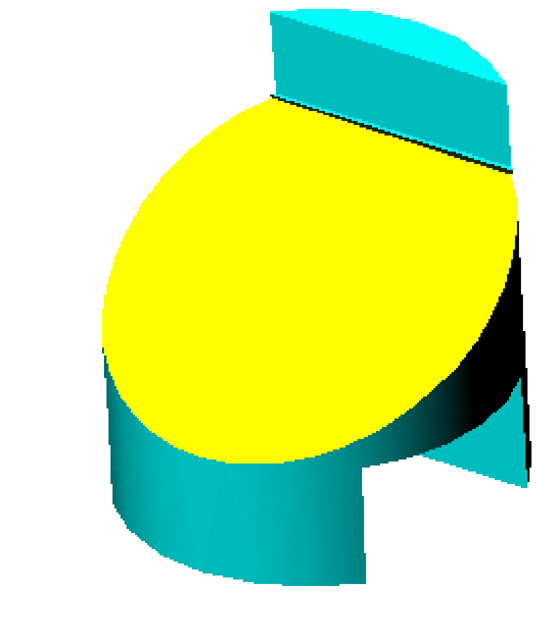


Рис. 8.2.1

Верхний ступенчатый вырез образован двумя плоскостями − фронтально-проецирующей β и профильной α (см. рис. 8.2.2). Плоскость α пересекает верхнее основание цилиндра по линии 1 − 2, которая проецируется в натуральную величину на видах сверху и слева. Взаимным пересечением плоскостей α и β получают фронтально-проецирующую прямую, которая пересекает боковую цилиндрическую поверхность в точках 6 и 7. Следовательно, четырехугольник, образованный сечением цилиндра плоскостью α, представляет собой прямоугольник 1 − 2 − 7 − 6, проецирующийся в натуральную величину на виде слева.

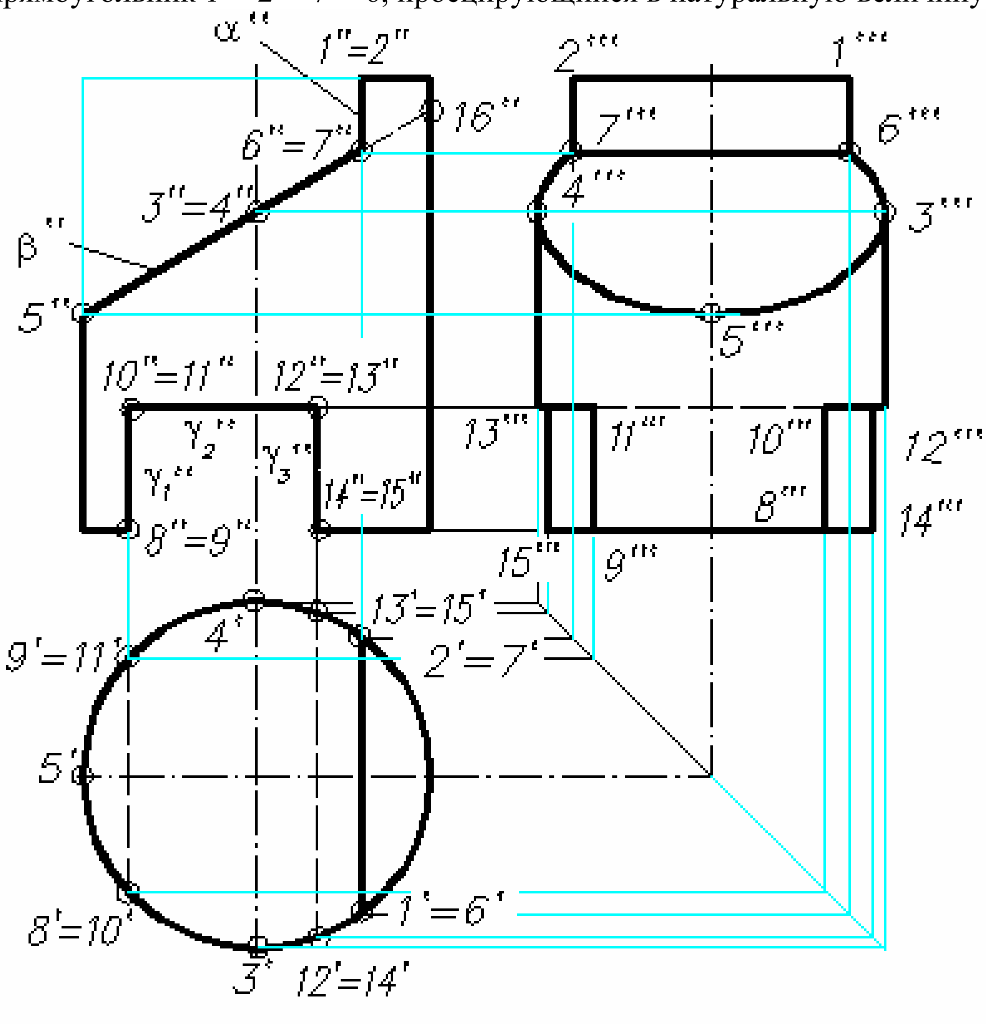


Рис. 8.2.2

Плоскость β, наклоненная к оси цилиндра, пересекает его поверхность по эллипсу, большой осью которого является отрезок 5″ − 16″, а величина малой оси равна диаметру цилиндра. В нашем случае эллипс будет неполным, так как справа ограничен линией 7 − 6. На виде сверху проекция эллипса совпадает с контуром цилиндрической поверхности, а на виде слева эллипс проецируется с искаженной величиной оси 5 − 16.
Нижний призматический вырез образован двумя профильными плоскостями γ1 и γ3 и горизонтальной плоскостью уровня γ2. Плоскость γ1 пересекает поверхность цилиндра по четырехугольнику 8 − 9 − 11 − 10, а плоскость γ3 − по четырехугольнику 12 − 13 − 15 − 14. Линии 8 − 9 и 14 − 15 образованы пересечением указанных плоскостей с нижним основанием цилиндра, а линии 10 − 11 и 12 − 13 − взаимным пересечением плоскостей γ1 и γ3 с плоскостью γ2.
Плоскость γ2 дает в пересечении с цилиндром часть круга, ограниченную хордами 10 − 11 и 12 − 13.

Построение вида слева выполнено с помощью линий связи. Для более точного построения эллипса необходимо воспользоваться вспомогательными секущими плоскостями.

8.2.3. СЕЧЕНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

В сечении конической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии:
− окружность, если секущая плоскость α перпендикулярна оси вращения (рис. 8.3, а);
− эллипс, если секущая плоскость α пересекает все образующие поверхности (рис. 8.3, б);
− парабола, если секущая плоскость α параллельна одной из образующих (рис. 8.3, в);

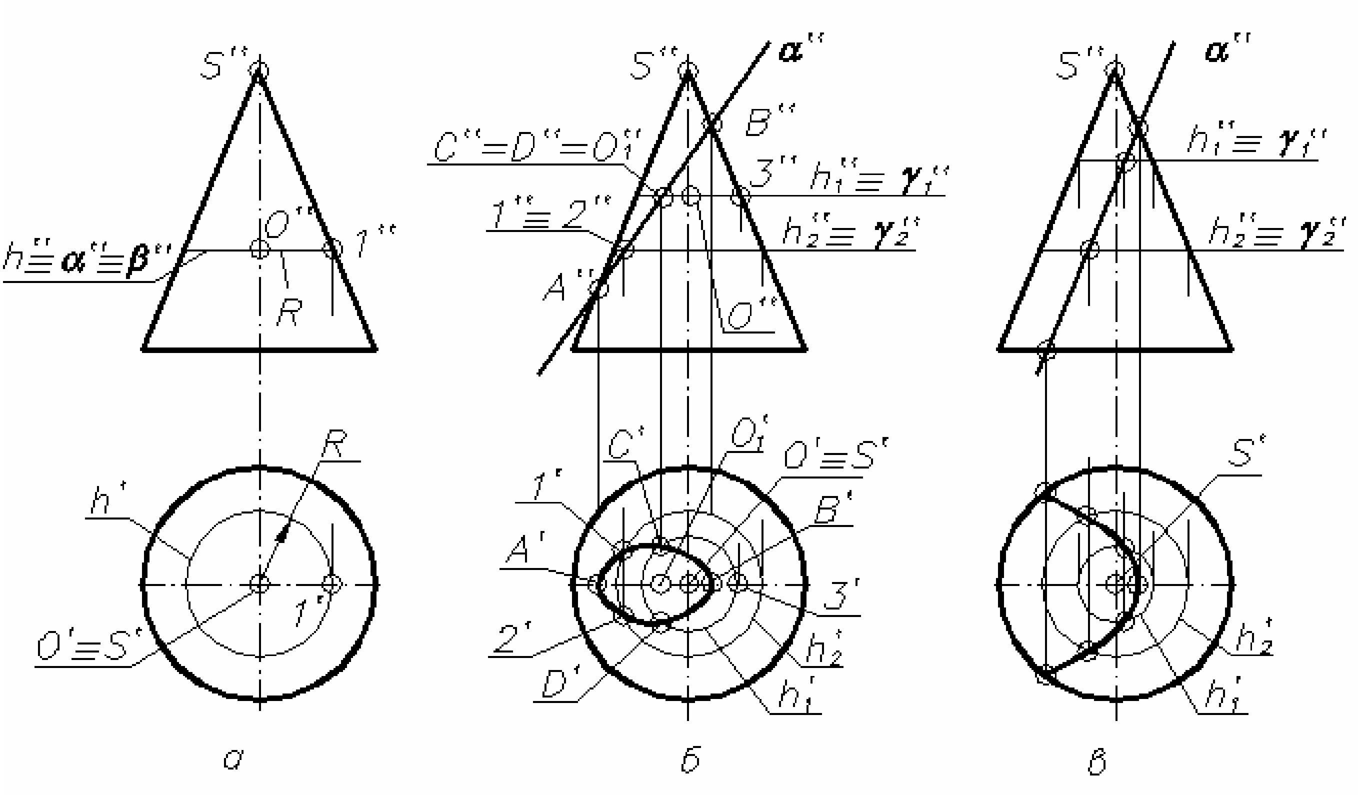
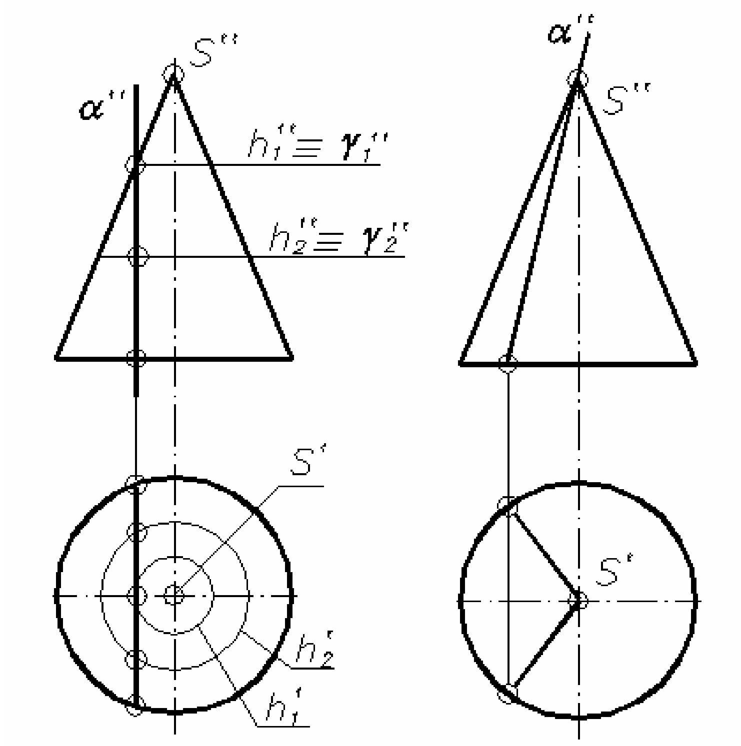


Рис. 8. 3
− гипербола, если секущая плоскость α параллельна двум образующим поверхности (рис. 8.4, а); фронтальные проекции этих образующих совпадают с осью вращения;
− две образующие прямые, если секущая плоскость α проходит через вершину S конуса (рис. 8.4, б).



а б

Рис. 8.4

Проекции кривых линий сечений конуса плоскостью целесообразно строить с использованием плоскостей посредников, перпендикулярных его оси. Линия пересечения при этом будет окружностью радиуса R (см. рис. 8.3, а).
Рассмотрим построение линии пересечения на примере, приведенном на рис. 8.3, б. Построение начинают с опорных точек. В рассматриваемом примере опорными буту точки A, B, C и D. Положение точек A и B, ограничивающих большую ось эллипса, очевидно. Точка O, которая служит центром эллипса, делит отрезок AB пополам. Точки C и D − фронтально конкурирующие и ограничивают малую ось эллипса. Положение этих точек можно определить, вводя вспомогательную фронтально проецирующую плоскость γ, проходящую через фронтальную проекцию O'' центра эллипса O. Горизонтальная проекция h' линии пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью конуса − окружность. Горизонтальная проекция линии пересечения секущей плоскости α и вспомогательной плоскости γ − фронтально проецирующая прямая, совпадающая с линией связи O'O''. Все точки, лежащие на этой линии, принадлежат секущей плоскости α. Таким образом, точки пересечения линии связи O'O'' и h' принадлежат одновременно поверхности конуса и секущей плоскости α, т.е. являются точками, лежащими на линии их пересечения.

Аналогично строят промежуточные точки пересечения, например точки 1 и 2. Проводят вспомогательную плоскость γ` и определяют вырожденную в точку фронтальную проекцию линии пересечения этой плоскости и секущей плоскости $\alpha$. Из этой точки проводят линию связи до пересечения в точках 1' и 2' с окружностью h`1. Такие построения повторяют необходимое число раз, после чего полученные точки соединяют плавной кривой. В рассматриваемом примере сечение будет иметь форму эллипса. Натуральный вид эллиптического сечения можно построить при помощи его осей AB = A''B'', CD = C'D'.

Подобным образом строят конические сечения, приведенные на рис. 8.3, в (парабола) и рис. 8.4, а (гипербола).

8.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Чтобы определить точки пересечения прямой с поверхностью, необходимо выполнить следующие операции:

– через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость;

– построить линию сечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью;

– отметить точки пересечения построенной линии с заданной прямой. Полученные точки будут искомыми.

8.3.1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРА С ПРЯМОЙ

На рис. 8. 8 приведена прямая круговая цилиндрическая поверхность, которая пересекается прямой m.

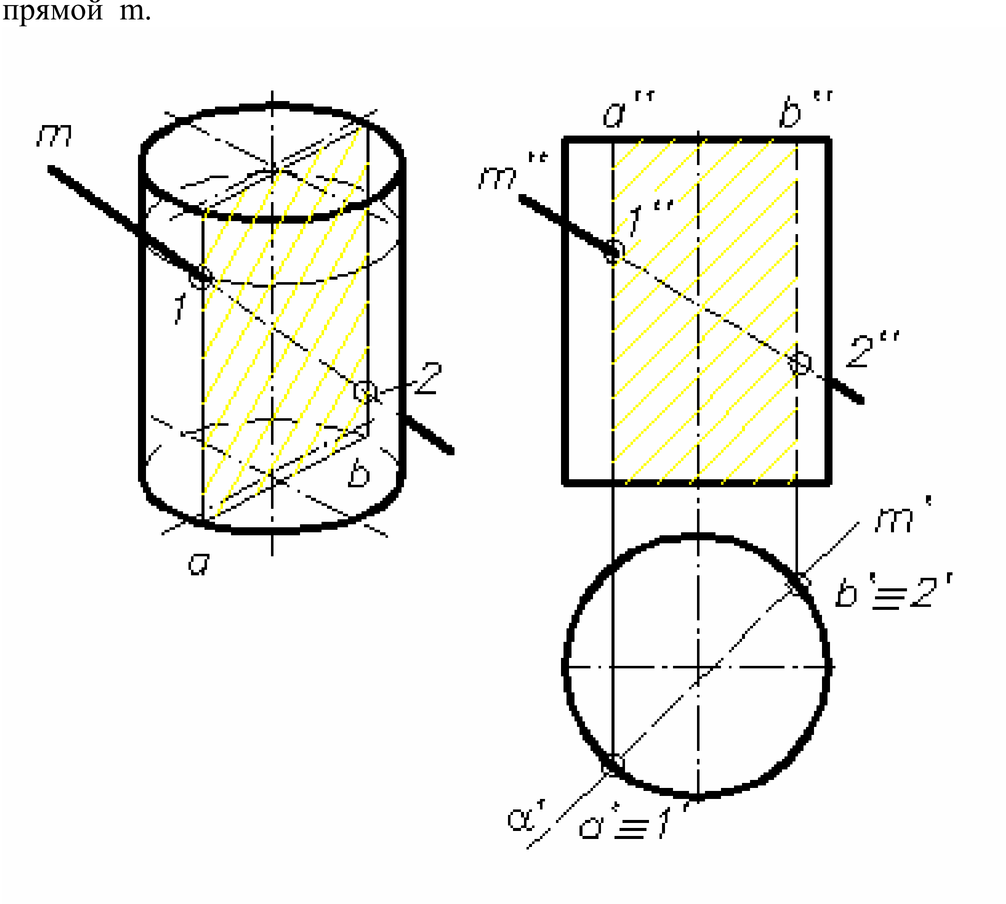


Рис. 8.8

Для того, чтобы найти точки пересечения, заключаем прямую в горизонтально-проецирующую плоскость α, которая пересечет поверхность цилиндра по двум образующим − a и b. Затем проводим из точек a′ и b′ линии связи на фронтальную плоскость проекций и на пересечении фронтальных проекций образующих a″ и b″с фронтальной проекцией прямой m″ отмечаем фронтальные проекции точек 1″ и 2″. В заключении определяем видимость прямой m.

8.3.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА И ПРЯМОЙ

Построить точки пересечения прямой n с поверхностью прямого кругового конуса (рис. 8.9).

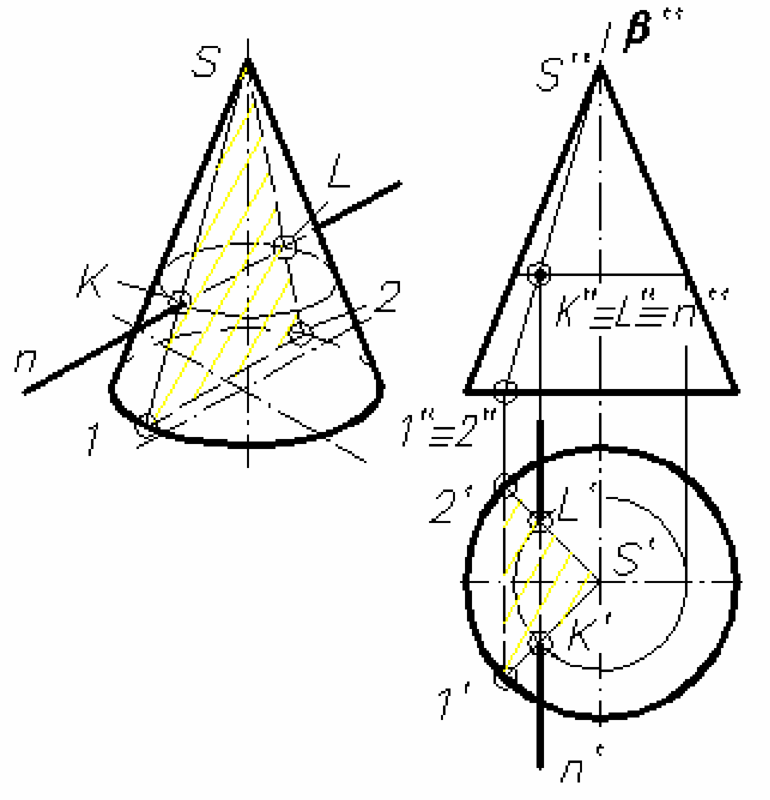


Рис. 8.9

Прямая n перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, поэтому фронтальная проекция точек пересечения будет совпадать с фронтальной проекцией прямой n″. Проведем на фронтальной плоскости проекций секущую плоскость β, проходящую через данную прямую и вершину конуса S. В этом случае конус будет пересекаться плоскостью по прямолинейным образующим S-1 и S-2.

В сечении получается треугольник, одна вершина которого совпадает с вершиной конуса S , а две другие располагаются на его основании.

С помощью линии связи находим горизонтальные проекции точек 1′ и 2′ на пересечении образующих с основанием конуса. Полученный треугольник S-1-2 и прямая n лежат в одной секущей плоскости – β. Отмечаем горизонтальные проекции точек пересечения K′ и L′ образующих S′-1′ и S′-2′ с проекцией прямой n′ и определяем видимость этой прямой.

8.3.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ СФЕРЫ И ПРЯМОЙ

Определим точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис. 8. 10).

Прямая l расположена параллельно фронтальной плоскости проекций, поэтому выбираем в качестве секущей плоскости вспомогательную плоскость α, проходящую через прямую l и параллельную фронтальной плоскости проекций. Эта плоскость пересекает сферу по окружности радиуса R, которая на фронтальной плоскости проекций изобразится , без искажений.

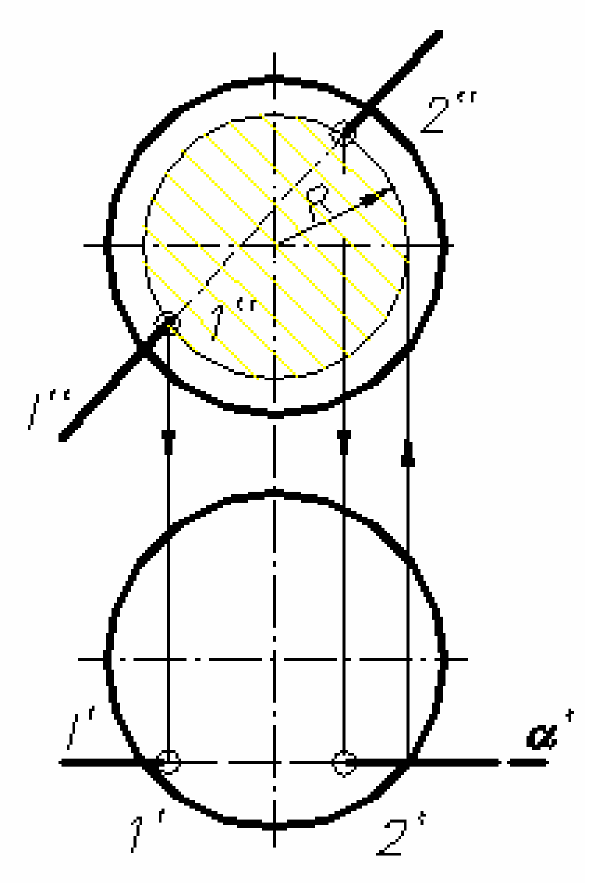


Рис. 8.10

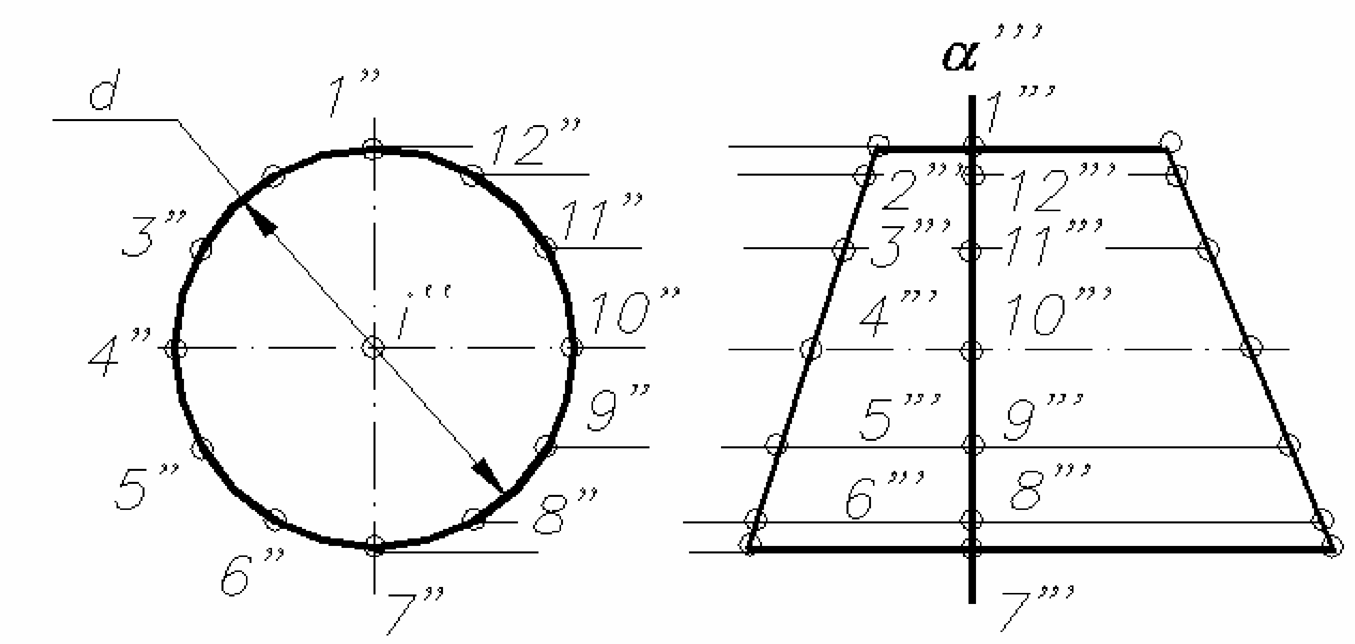
На пересечении этой окружности и проекции прямой l″ отмечаем точки 1″ и 2″, которые являются точками пересечения прямой l со сферой. Затем проецируем полученные точки на горизонтальную проекцию прямой l′ и определяем видимость этой прямой на обеих проекциях.

8.4. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

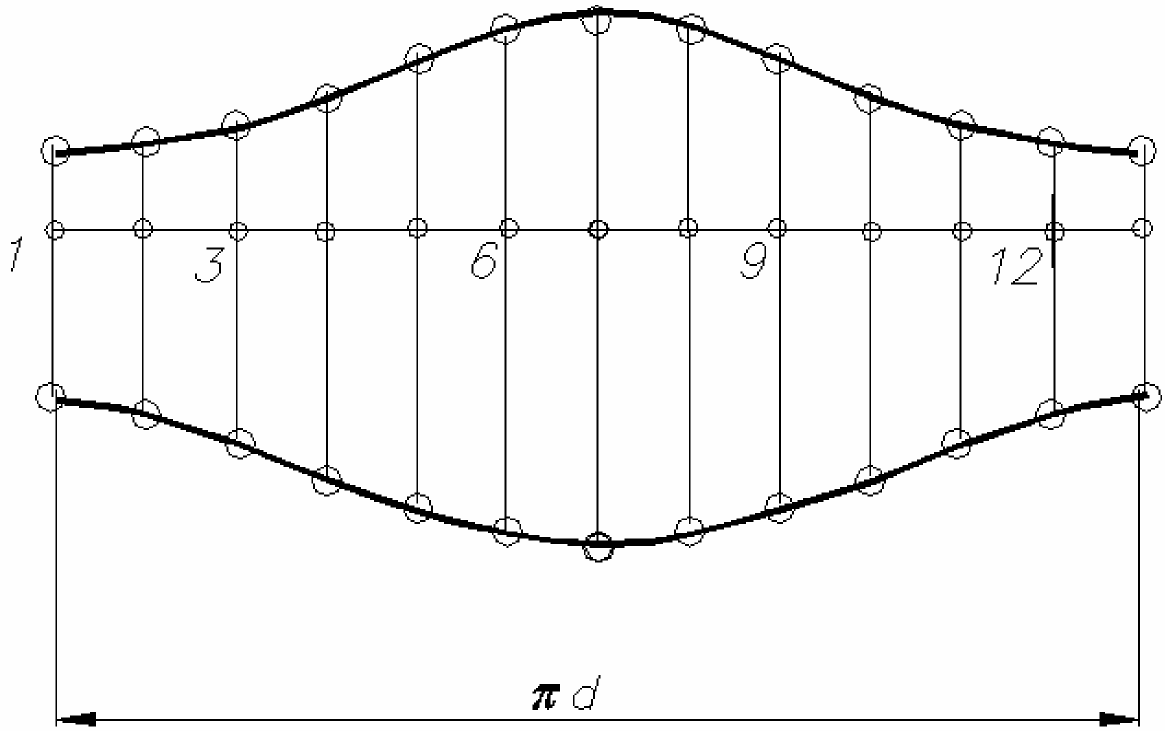
8.4.1. РАЗВЕРТКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для получения приближенной развертки цилиндрической поверхности последнюю заменяют вписанной в нее поверхностью призмы. Развертывание полученной призматической поверхности может быть выполнено, например, способом нормального сечения. При достаточно большом числе граней и малых размерах ребер оснований погрешность, получаемая при замене цилиндрической поверхности призматической поверхностью, не имеет практического значения.

На рис. 8.11, а приведена цилиндрическая поверхность (далее для краткости будем называть просто цилиндр), усеченная с двух сторон наклонными плоскостями. Ось поверхности перпендикулярна фронтальной плоскости проекций.



а



б

Рис. 8.11

Пересечем поверхность цилиндра вспомогательной плоскостью γ, перпендикулярной к оси цилиндра, и построим натуральный вид сечения поверхности цилиндра плоскостью γ, совместив плоскость сечения с фронтальной проекцией цилиндра (рис. 8.11, а). Разделим окружность сечения на двенадцать равных частей и, отметив полученные точки деления на профильной проекции (1''', 2''', 3''', …, 12'''), проведем через них проекции образующих цилиндра. Эти образующие примем за ребра призмы, вписанной в цилиндр, и при построении развертки заменим (приближенно) боковую поверхность цилиндра боковой поверхностью полученной призмы. Для этого построим (рис. 8.11, б) развернутый периметр 1-2-3 … 12-1 многоугольника, образовавшегося в сечении поверхности призмы плоскостью γ, и вычертим относительно этой линии натуральную величину каждого ребра призмы; концы этих ребер соединим плавными кривыми линиями.

8.4.2. РАЗВЕРТКА КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Приближенная развертка конической поверхности может быть получена, если заменить эту поверхность вписанной в нее поверхностью пирамиды (с достаточно большим числом боковых граней) и принять развертку поверхности пирамиды за искомую развертку заданной конической поверхности.
Выполним развертку прямого кругового конуса, усеченного фронтально-проецирующей плоскостью α (рис. 8.12).

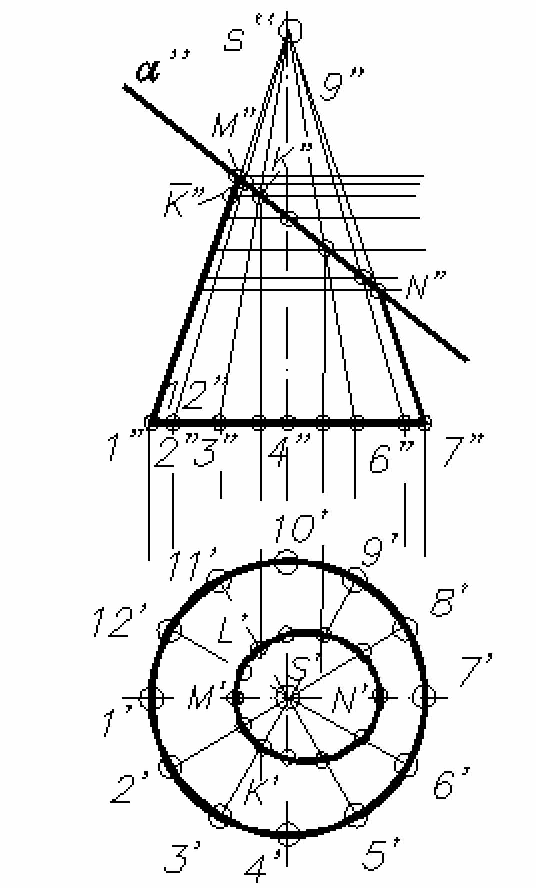


Рис. 8.12

Известно, что фигура развертки боковой поверхности полного конуса представляет собой круговой сектор; угол φ, составленный радиусами, ограничивающими этот сектор, определяется из выражения:

$$\varphi = 360^{o} R/l,$$

где R − радиус окружности основания конуса, l − образующая конуса. Зная φ, можно определить (рис. 273) длину хорды (1−1), стягивающей дугу сектора:

$$(1\text{-}C) = 1/2\ (1\text{-}1) = l * \sin \varphi/2; \qquad (1\text{-}1) = 2l * \sin \varphi/2$$

Для построения развертки боковой поверхности полного конуса вычертим хорду (1-1) и построим на ней равнобедренный треугольник 1-S-1, определив тем самым положение точки S. После этого вычертим дугу (1-1) и разделим ее на равные части 1-2, 2-3, 3-4, … в соответствии с числом частей, на которое разделена окружность основания конуса.
Чтобы вычертить на полученной развертке очертание развернутой линии сечения MKNLM, определим на рис. 8.12 натуральную величину каждого из отрезков, отсеченных секущей плоскостью от образующих S-1, S-2, S-3, …, пользуясь способом вращения вокруг высоты конуса, получим SM = S"$\underline{\text{M}}$", S"K" = S"$\underline{\text{K}}$" и т.д. Соединив плавной кривой линией точки M, K, N, L, M, получим развертку (рис. 8.13) боковой поверхности усеченного конуса.

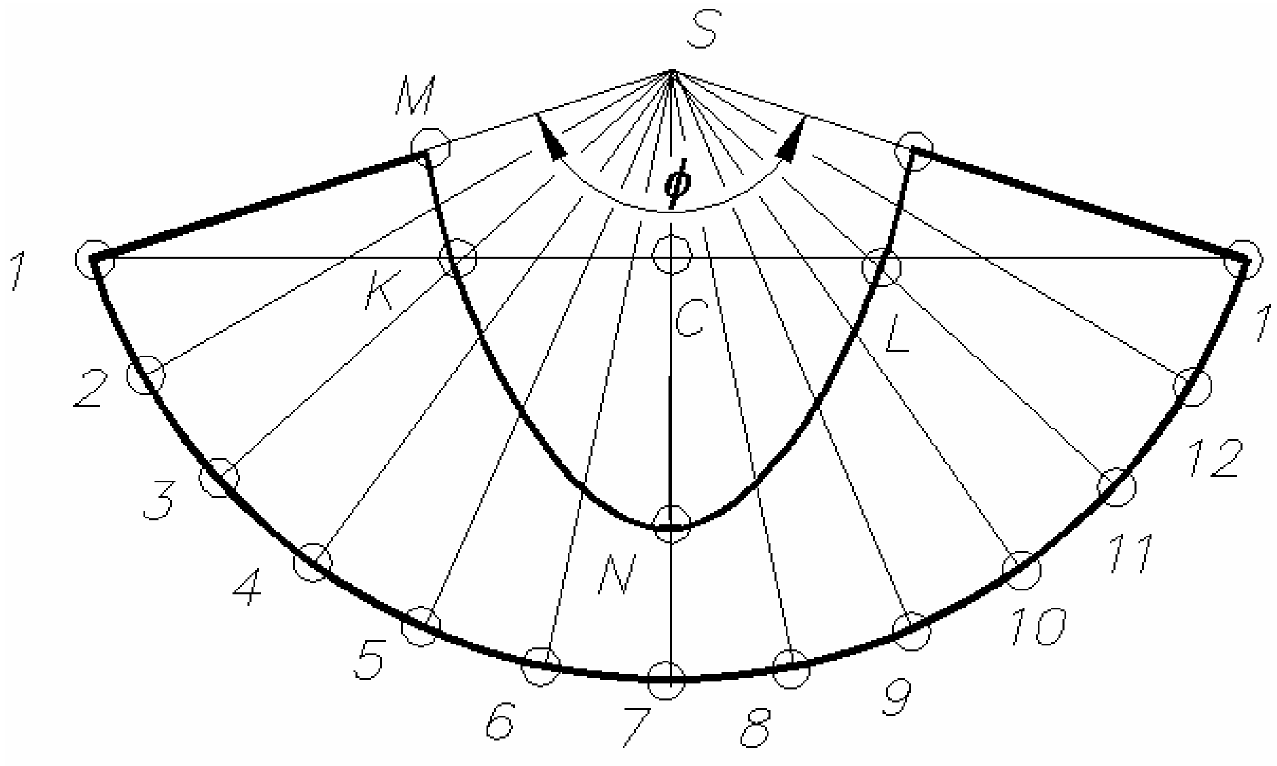


Рис. 8. 13

Контрольные вопросы

1. Как строится линия сечения поверхности плоскостью?
2. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового цилиндра?
3. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового конуса?
4. Какие линии могут быть получены в сечении сферы?
5. Каков общий принцип построения точек пересечения прямой с поверхностью?

Контрольные вопросы и задания
1. Какова классификация линий?
2. Как построить проекции окружности в плоскостях общего и частного положения?
3. Какие кривые линии вы знаете?
5. Каковы основные принципы образования поверхности?
6. Расскажите о классификации поверхностей.
7. Что такое определитель поверхности?
8. Как образуются линейчатые поверхности, поверхности вращения?
9. Какие поверхности вы знаете?