ЛЕКЦИЯ 7

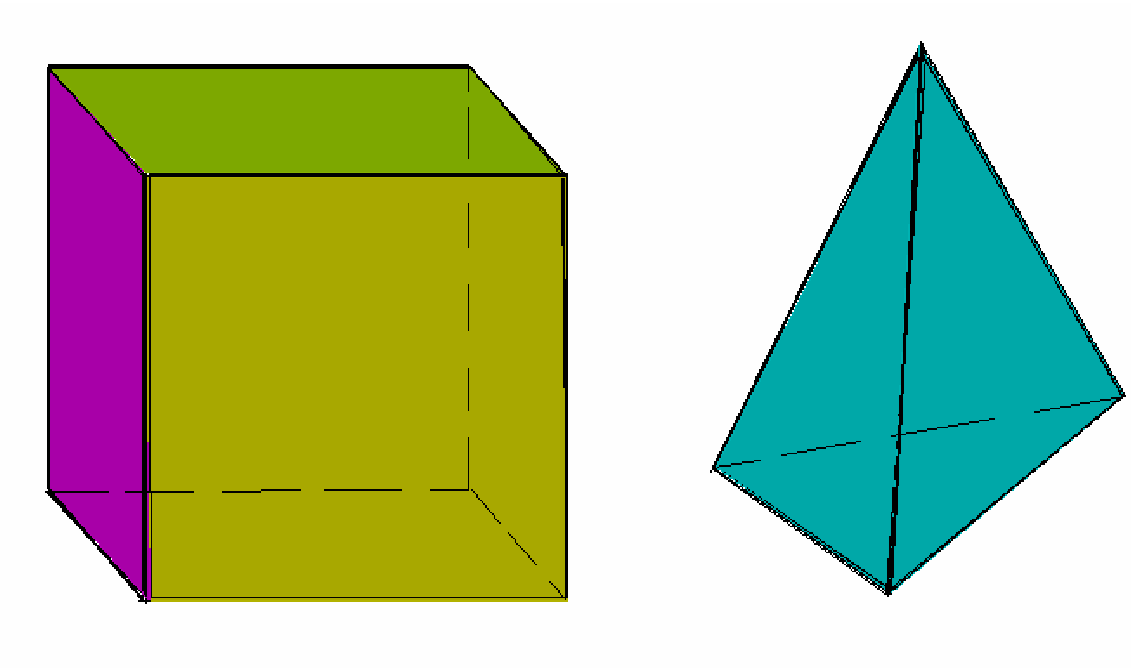
7. МНОГОГРАННИКИ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ.

Гранные поверхности − это поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломаной линии. Часть этих поверхностей представляют многогранники − замкнутые поверхности, образованные многоугольниками, называемыми гранями. Линии пересечения граней между собой называются ребрами, а точки пересечения нескольких ребер между собой − вершинами.

Многогранники называются правильными, если все грани представляют собой правильные многоугольники.

Из большого числа многогранников рассмотрим призмы и пирамиды.

Призма − многогранник, у которого две грани − основания − одинаковые и взаимно параллельные многоугольники, а остальные грани (боковые) − параллелограммы (рис. 7.0.1, а). Призма называется прямой, если ее ребра перпендикулярны плоскости основания, и наклонной − если они не перпендикулярны.



а б

Рис. 7.0.1

Пирамида − многогранник, у которого одна грань, которая принимается за основание, является произвольным многоугольником, а остальные грани (боковые) − треугольники с общей точкой, которая называется вершиной (рис. 7.0.1, б).

7.1. СЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

Если одна из пересекающихся поверхностей − плоскость, то такое пересечение принято называть сечением поверхности плоскостью, а полученную при этом линию – линией сечения. Если она замкнута, то полученную фигуру называют сечением. В сечении поверхности плоскостью получается плоская линия.

7.1.1. СЕЧЕНИЕ ГРАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Если поверхность **гранная**, то линия сечения плоскостью будет **ломаная**.
Для построения линии пересечения призмы горизонтально-проецирующей плоскостью α (рис. 7.1.1) достаточно определить точки пересечения секущей плоскостью ребер и сторон основания (если имеет место пересечение основания) и соединить полученные точки с учетом их видимости .

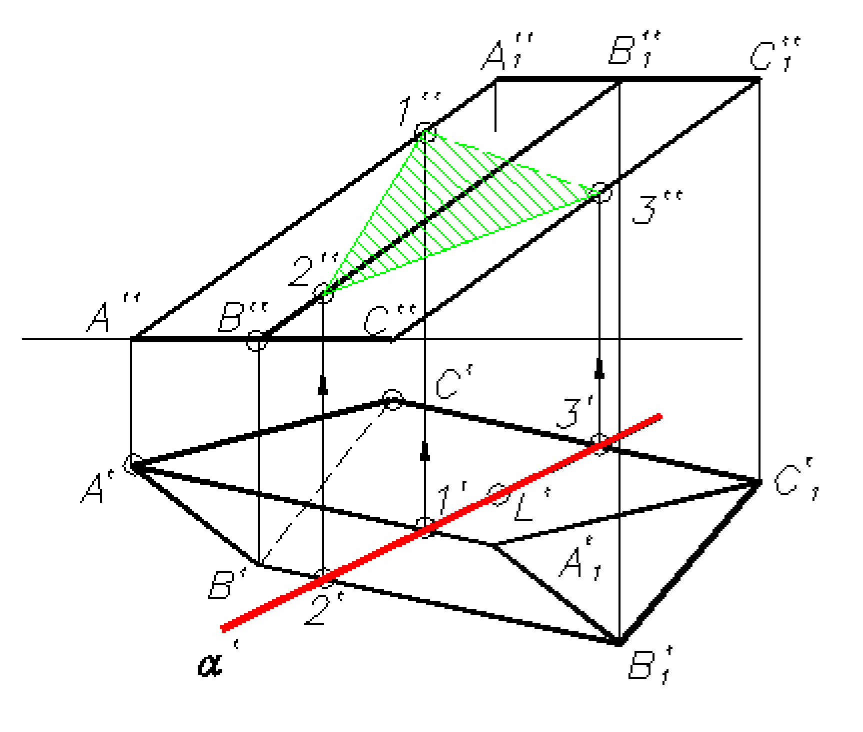


Рис. 7.1.1

Секущая плоскость α' занимает горизонтально проецирующее положение, поэтому точки пересечения ребер призмы определяют без дополнительных построений.

Точка 1 находится на ребре AA_1 , точка 2 − на ребре BB1 , точка 3 − на ребре CC1. Соединив точки 1", 2" и 3" на фронтальной плоскости проекций, получим линию сечения призмы плоскостью. Так как грань AA1CC1 невидима на фронтальной проекции, то и линия 1"3" также невидима и изображается штриховой линией.

Аналогичным образом строится линия пересечения пирамиды плоскостью (рис. 7.1). Секущая плоскость α'' занимает фронтально проецирующее положение, поэтому точки пересечения ребер определяют без дополнительных построений. Так как грань ASC невидима относительно плоскости $П_1$, то линия 1'3' тоже невидима.

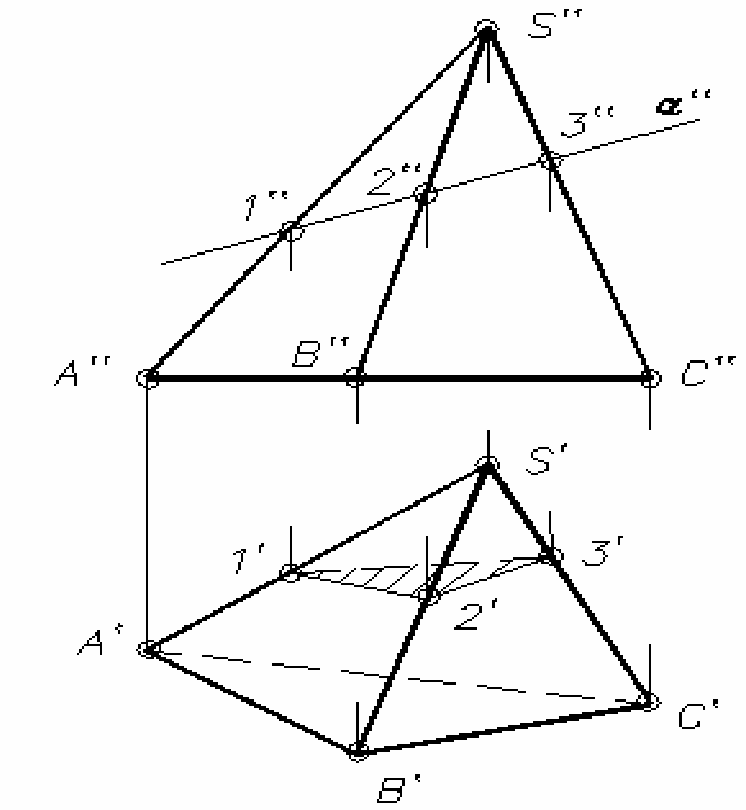


Рис. 7.1

7.1.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЯМИ

На рис. 7.1.2 изображено тело в форме правильной треугольной пирамиды с призматическим (квадратным) отверстием в ней.

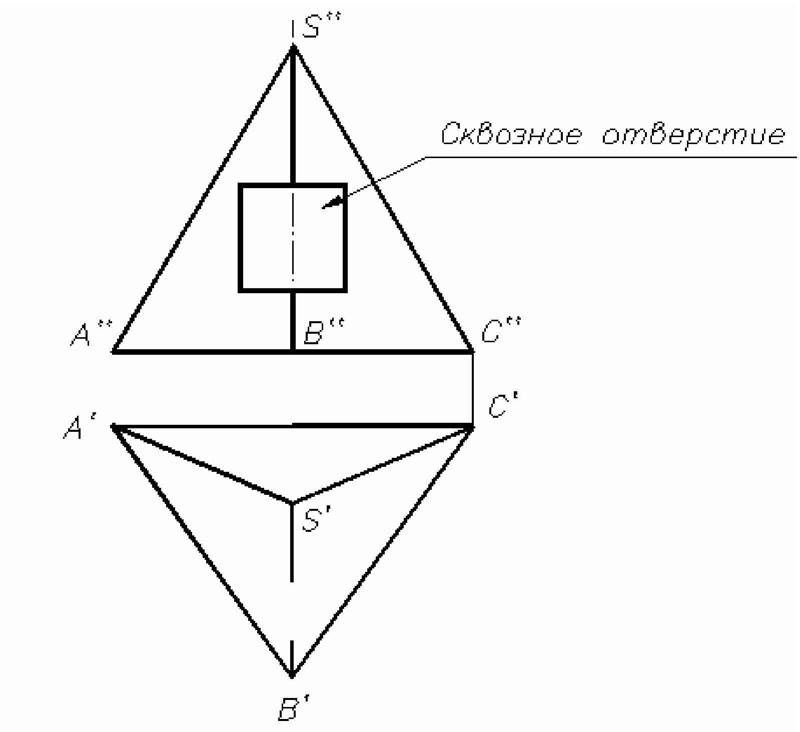


Рис. 7.1.2 (условие задачи)

Построение линий пересечения выполняется на горизонтальной и профильной проекциях, а фронтальная проекция пирамиды задана полностью. На чертеже показано построение точек 1 и 5 (на горизонтальной проекции) при помощи прямых, проведенных через вершину S. Точки 3, 4 и 6 (на горизонтальной проекции) найдены при помощи прямых, проходящих на гранях SAB и SAC параллельно плоскости Π_1; горизонтальные проекции этих прямых проходят через точку M′ параллельно A′B′ и A′C′. Точка 2 может быть найдена в данном случае либо аналогично точке 3, либо при помощи профильной проекции.

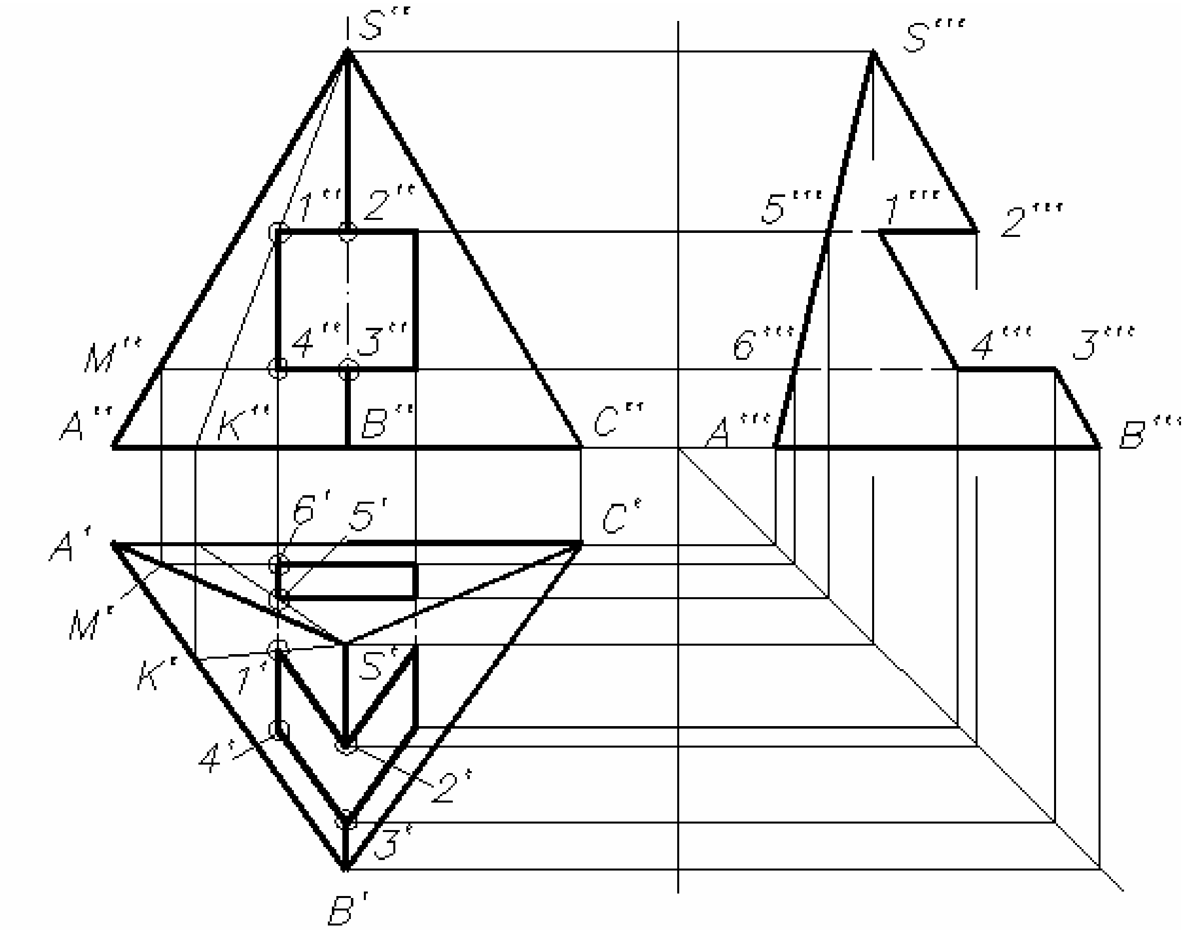


Рис. 7.1.2 (решение)

Для построения линии пересечения гранной поверхности, например, **призмы**, **плоскостью общего положения** , необходимо использовать вспомогательные секущие плоскости, которые совмещают с ребрами поверхности. На рис. 7.1.3 показано построение точки 1, находящейся на ребре AA1, через которое проведена вспомогательная секущая плоскость $\alpha 1$. Плоскость общего положения задана пересекающимися прямыми m и n.

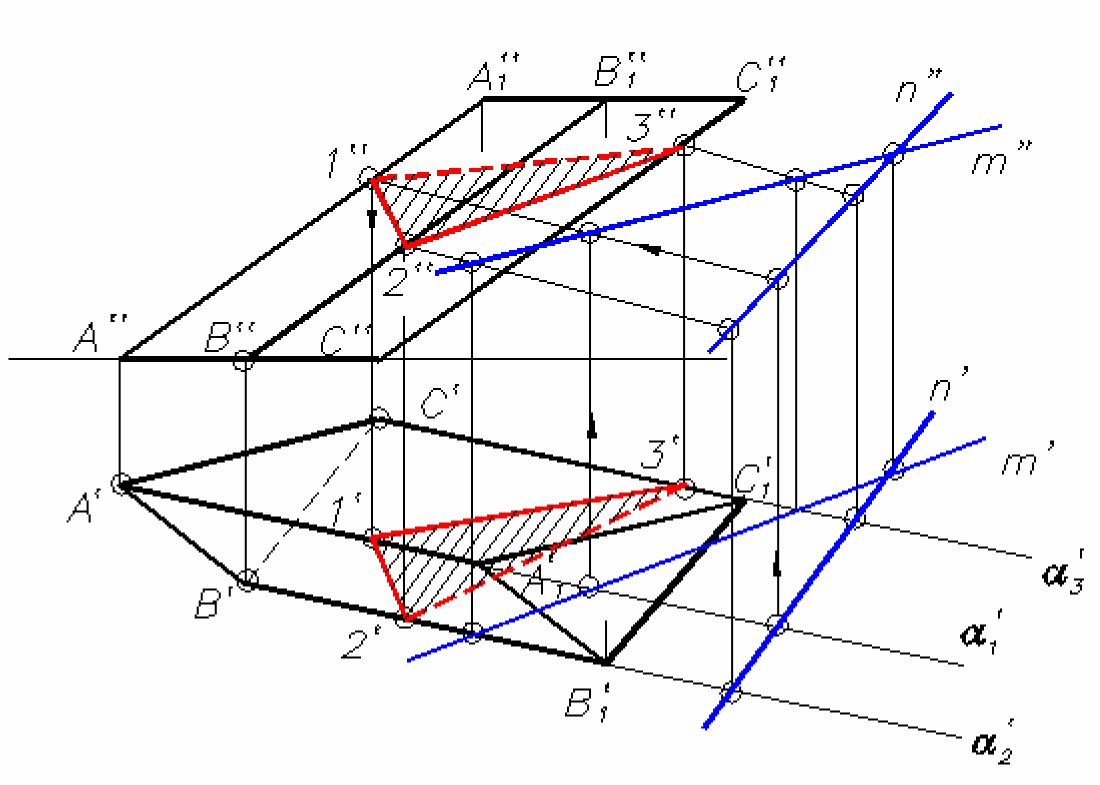


Рис. 7.1.3

7.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Чтобы определить точки пересечения прямой с поверхностью, необходимо выполнить следующие операции:

– через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость;
– построить контур сечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью;
– отметить точки пересечения контура построенного сечения с заданной прямой.

Полученные точки будут искомыми.

7.2.1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПРИЗМЫ

При пересечении поверхности призмы прямой линией получаются две точки. На рис. 7.2.1 приведено построение точек пересечения прямой AB и треугольной призмы. Положение проекций K′ и M′ очевидно, так как боковые грани призмы перпендикулярны к плоскости проекций П1. По точкам K′ и M′ найдены точки K″ и M″.

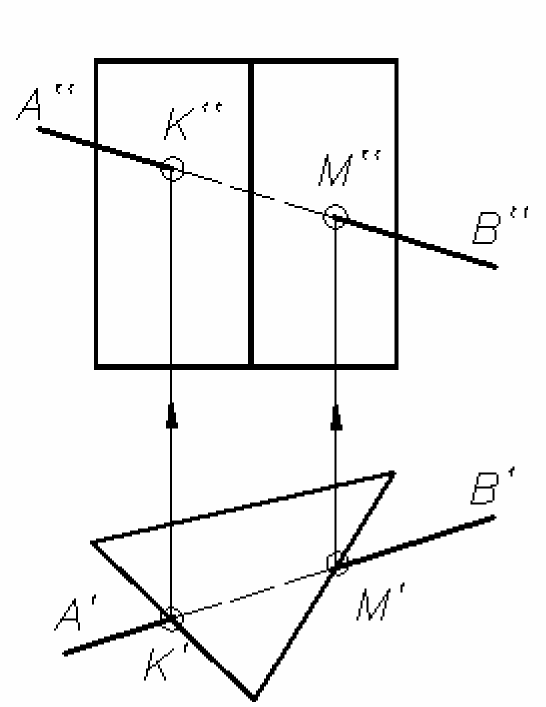


Рис. 7.2.1

——

7.2.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ

На рис. 7.2.2 приведено построение точек пересечения наклонной треугольной призмы $AA_1BB_1CC_1$ и прямой m.

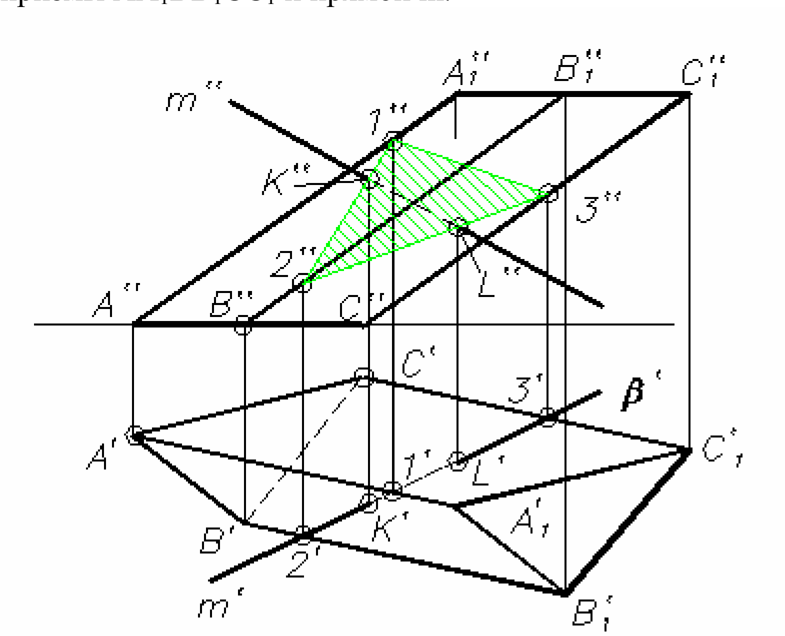


Рис. 7.2.2

Последовательность построений следующая:

− прямая m заключается во вспомогательную секущую плоскость β (β′ − горизонтально - проецирующая плоскость), проходящую через прямую m;

− определяется линия пересечения призмы и секущей плоскости. Для этого на горизонтальной плоскости проекций отмечаются точки пересечения проецирующей плоскости β с ребрами призмы: точка 1 находится на ребре AA1, 2 − на ребре BB1, 3 − на ребре CC1. Полученные точки проецируются на фронтальную плоскость и соединяются между собой. Треугольник 1″-2″-3″ (на рисунке заштрихован) представляет собой сечение призмы плоскостью β;

− находим точки K″ и L″ пересечения прямой m с треугольником 1-2-3 на фронтальной плоскости, затем по линиям связи находим горизонтальные проекции точек K′ и L′;

− определяем видимые и невидимые части прямой m. Невидимая часть прямой, заключенная между точками K и L, изображается штриховой линией.

7.2.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПИРАМИДЫ

На рис. 7.2.3 приведен пример определения точек входа и выхода при пересечении прямой с пирамидой.

Для решения задачи проводим фронтально проецирующую секущую плоскость α. Определяем точки ее пересечения с ребрами пирамиды. Используя полученные точки, строим проекции треугольного сечения, точки пересечения горизонтальной проекции которого с прямой l (точки K′ и L′) есть горизонтальные проекции искомых точек. Строим их фронтальные проекции K″ и L″, после чего определяем видимость прямой.

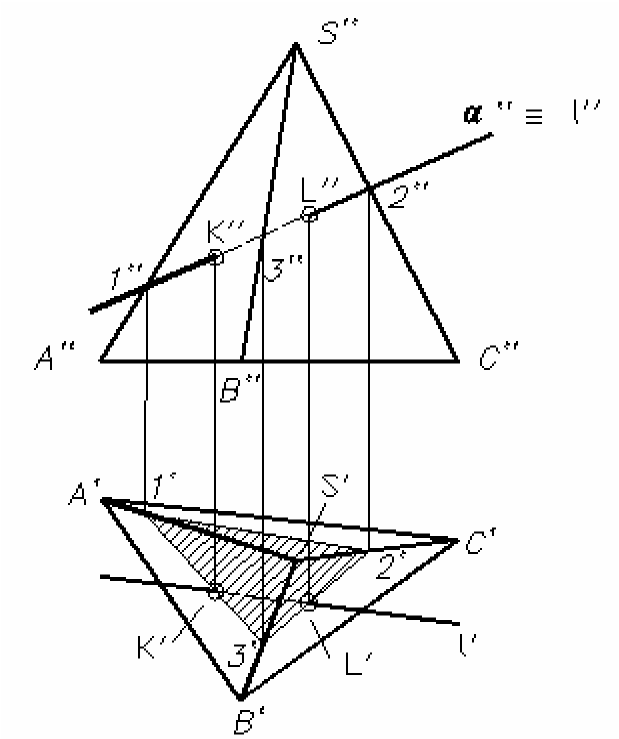


Рис. 7.2.3

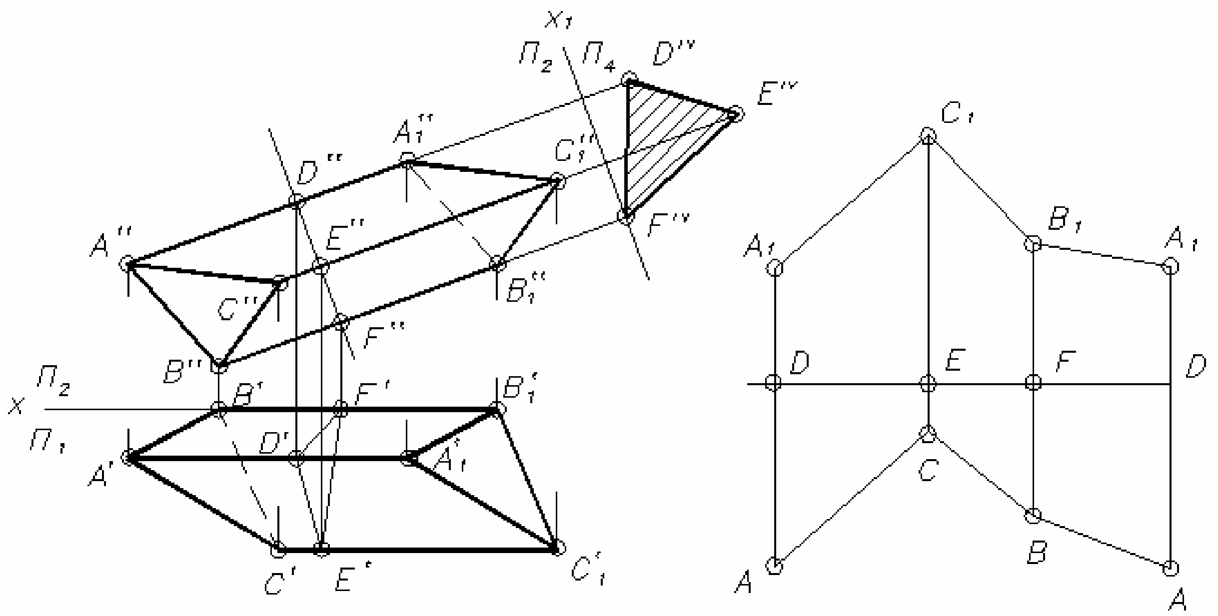
7.3. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ

Разверткой поверхности называют плоскую фигуру, получаемую при совмещении поверхности с плоскостью. При развертывании поверхности на плоскости каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке; линия поверхности переходит в линию развертки; длины линий, величины плоских углов и площадей, ограниченных замкнутыми линиями, остаются неизменными. Теоретически точно развертываются только гранные поверхности, торсы, конические и цилиндрические поверхности.

7.3.1. РАЗВЕРТКА ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертки призматических и цилиндрических поверхностей строят способом нормального сечения.

Пусть призма (рис. 7.3.4, а) расположена относительно плоскостей проекций так, что ее боковые ребра являются фронталями. Тогда они проецируются на плоскость проекций $П_2$ в натуральную величину и фронтально проецирующая плоскость $\alpha(\alpha``)$, перпендикулярная к боковым ребрам, определит нормальное сечение DEF призмы. Построив его натуральный вид введением дополнительной плоскости проекций $П_4$, найдем натуральные величины D^4E^4, E^4F^4 и F^4D^4 сторон сечения, которые являются высотами параллелограммов, составляющих боковую поверхность призмы.



а б

Рис. 7.3.4

Для построения развертки нужно отложить на произвольной прямой полученные на дополнительной плоскости $П_4$ натуральные величины сторон нормального сечения (рис. 7. 3. 4, б), затем через их концы провести прямые, перпендикулярные к этой прямой. Если теперь отложить на этих перпендикулярах по обе стороны от прямой D-E-F-D отрезки боковых ребер, взятые с плоскости проекций $П_2$, и соединить их концы, то получим развертку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания, будем иметь ее полную развертку.

7.3.2. РАЗВЕРТКИ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертки пирамидальных и конических поверхностей строят способом треугольников – триангуляции (рис. 7. 3. 1, а). Этот метод сводится к построению истинных величин треугольных граней, из которых состоит пирамида или которыми заменяют развертываемую коническую поверхность.

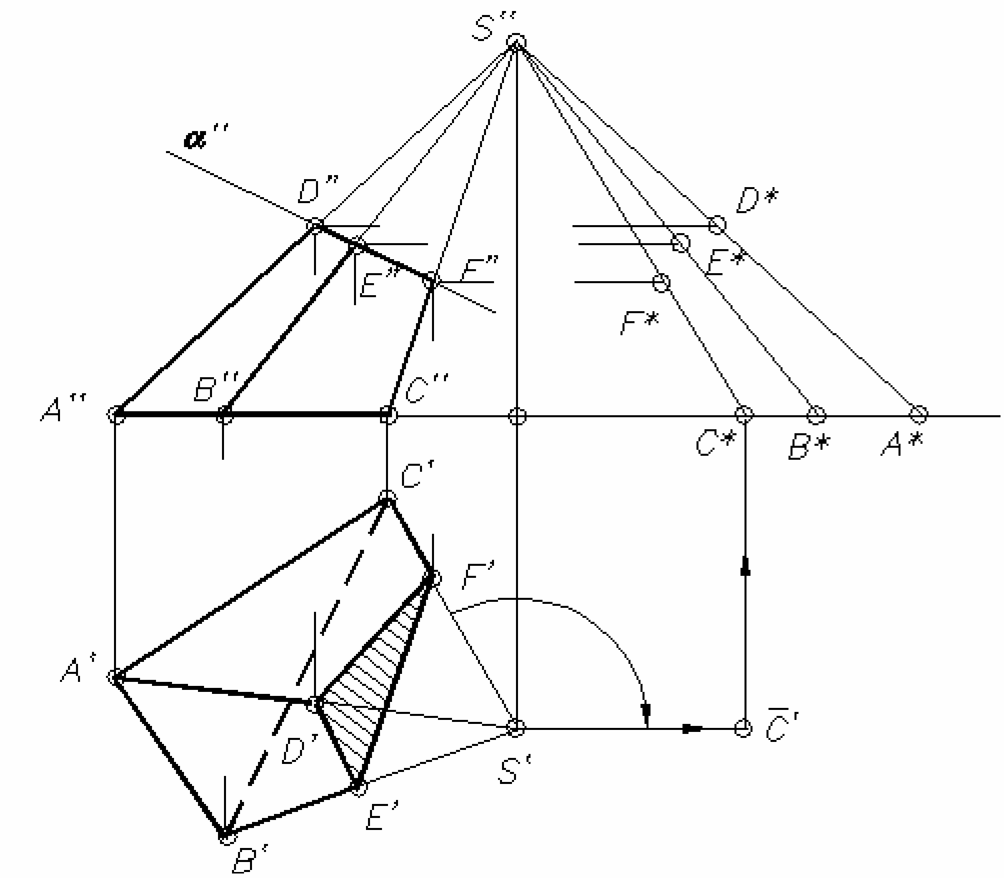


Рис. 7.3.1, а

На рис. 7. 3.1, б построена развертка пирамиды SABC, усеченной фронтальной проецирующей плоскостью α (α”). Чтобы получить развертку боковой поверхности пирамиды, вначале строят натуральную величину боковых ребер. В данном случае они построены способом вращения ребер вокруг проецирующей оси, проходящей через вершину пирамиды S. Ось перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Каждое ребро поворачивается вокруг точки S’ до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций (параллельно оси X). На рис. 7.3.1, а показано вращение проекции ребра S’C’. После вращения S’$\underline{C}$’ | | Π_2 . Затем находят новое положение ребра S”C* на фронтальной плоскости проекций, которое представляет собой его натуральную величину. Аналогично строятся ребра S″A*, S″B*, которые дают натуральную величину соответствующих ребер. Так как основание пирамиды расположено горизонтально, то на плоскости Π_1 имеем истинную его величину. Каждую треугольную боковую грань на развертке (на рис. 7.3.1, б) строят по трем известным сторонам. Например, чтобы построить грань SCA, проводим сначала отрезок, равный SC (направление выбрано произвольно), затем из точки C как из центра проводим вспомогательную окружность (или просто дугу) радиусом CA. После этого из вершины S проводим вторую окружность (или дугу). Радиус новой окружности равен SA. На пересечении этих окружностей находим точку A. Соединив полученные точки, строим грань SCA. Аналогично строятся грани SAB и SBC.

Натуральную величину расстояний точек D, E и F сечения пирамиды от вершины S (отрезки S″D*, S″E* и S″F*) определяют, как показано на рис. 7. 3.1, а, и откладывают от точки S на развертке.

пр

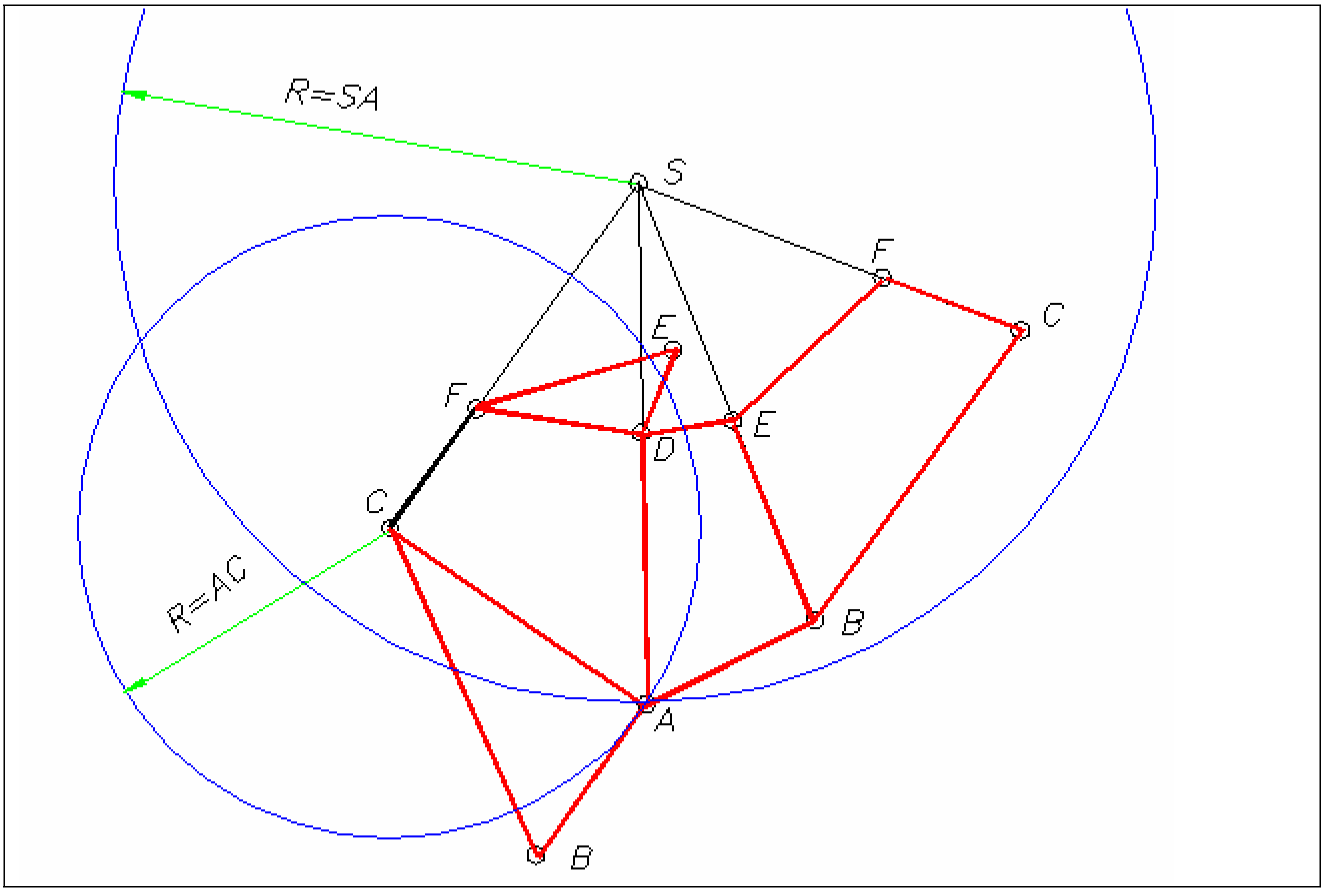


Рис. 7. 3. 1, б

После построения развертки боковой поверхности усеченной части пирамиды необходимо достроить треугольники ABC и DEF, дающие натуральную величину основания и сечения пирамиды.

Контрольные вопросы и задания

1. Как строится линия сечения поверхности плоскостью?
2. Какие линии могут быть получены в сечении прямой призмы?
3. Какие линии могут быть получены в сечении пирамиды?
4. Каков общий принцип построения точек пересечения прямой с поверхностью?
5. Что называют разверткой поверхности?
6. Какие поверхности относятся к развертывающимся?
7. Можно ли построить развертку неразвертывающейся поверхности?
8. Каким способом строят развертки пирамидальных поверхностей? В чем его сущность?
9. Каким способом строят развертки призматических поверхностей?
10. Как нанести на развертку поверхности точку, ей принадлежащую?