

6. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ.

6.1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ КРИВОЙ ЛИНИИ

Кривая линия представляет собой геометрическое место последовательных положений непрерывно перемещающейся в пространстве точки. Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривую называют плоской. В противном случае ее называют пространственной. Примером пространственной кривой может служить винтовая линия. Точки плоских кривых разделяют на обыкновенные и особые. Некоторые случаи особых точек – точки перегиба, точки возврата, узловые точки, точки излома.

Свойства ортогонального проецирования кривой:

1. Касательная к кривой в пространстве проецируется в касательную к ее проекции (рис. 6.2.).

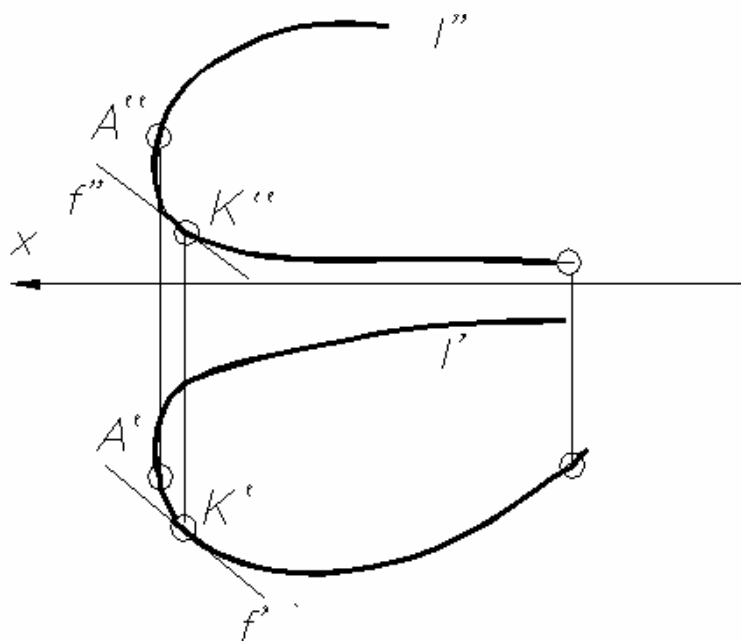


Рис. 6.2

2. Порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется при проецировании. Так, кривые второго порядка проецируются также в кривые второго порядка. В частном случае (при расположении плоской кривой в проецирующей плоскости) ее проекция вырождается в прямую. На рис. 6.3. показан чертеж плоской кривой m , лежащей в плоскости $\alpha \perp \Pi_2$.

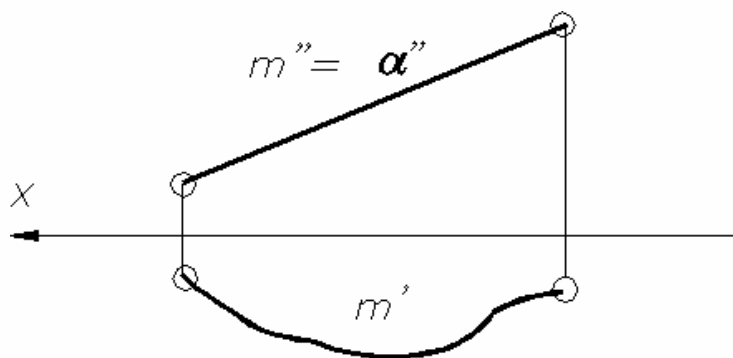


Рис. 6.3

Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая, (плоская или пространственная), необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости.

Заданная на рис. 6.4. кривая пространственная, так как ее точка D не принадлежит плоскости, определяемой тремя другими точками A, B и E этой кривой.

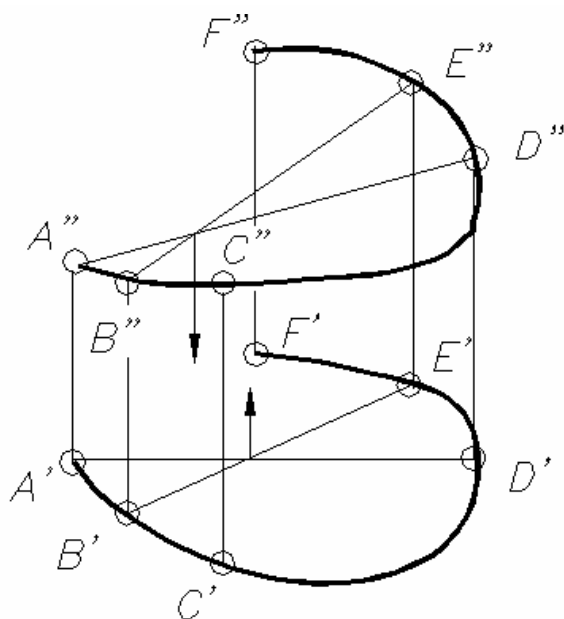


Рис. 6.4

Окружность – плоская кривая второго порядка, ортогональные проекции которой в общем случае – эллипсы. Диаметр окружности, параллельный плоскости проекций, проецируется на нее в натуральную величину, и его проекция служит большой осью эллипса. На рис. 6.5 дан комплексный чертеж окружности, расположенной в плоскости α ($h \cap f$).

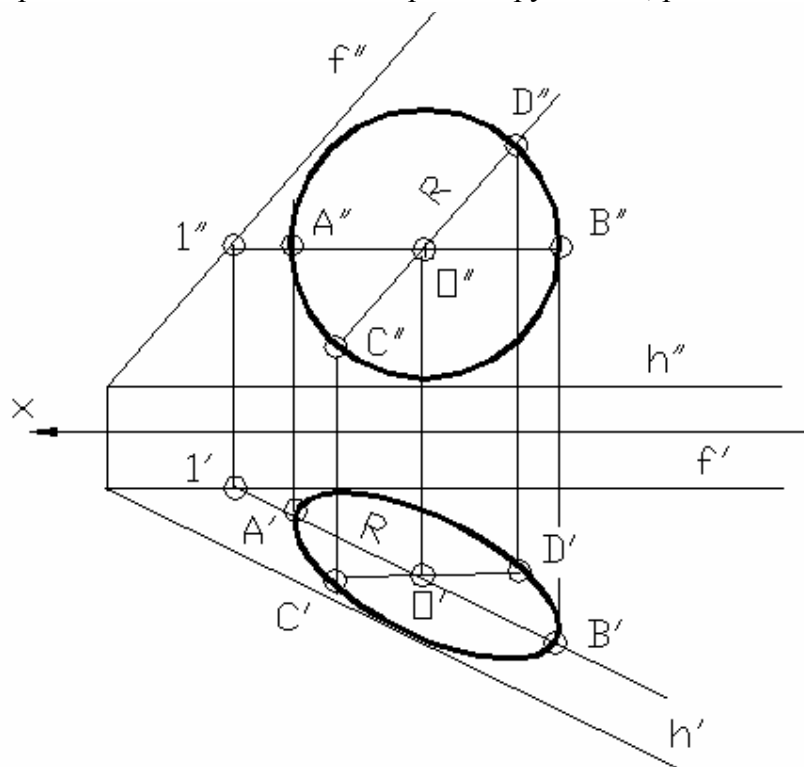


Рис. 6.5

Точка O – центр окружности, R – ее радиус; $A'B'$ – большая ось эллиптической горизонтальной проекции окружности ($AB \parallel h$); $C''D''$ – большая ось эллиптической фронтальной проекции окружности ($CD \parallel f$). Если окружность расположена в проецирующей плоскости (рис. 6.6), то одна из ее проекций вырождается в отрезок прямой $A''B''$, равный диаметру окружности.

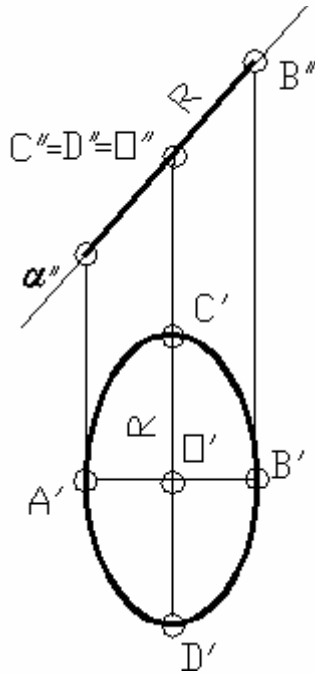


Рис. 6.6

Отрезок $C'D'$ (большая ось горизонтальной проекции окружности) – проекция диаметра, параллельного горизонтальной плоскости проекций. В данном случае, когда плоскость окружности является фронтально проецирующей, отрезок CD – фронтально проецирующая прямая.

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, представляющая собой траекторию точки, выполняющей винтовое движение. Винтовое движение включает равномерно поступательное движение вдоль оси i (рис. 6.7, а) и равномерно вращательное движение вокруг этой оси.

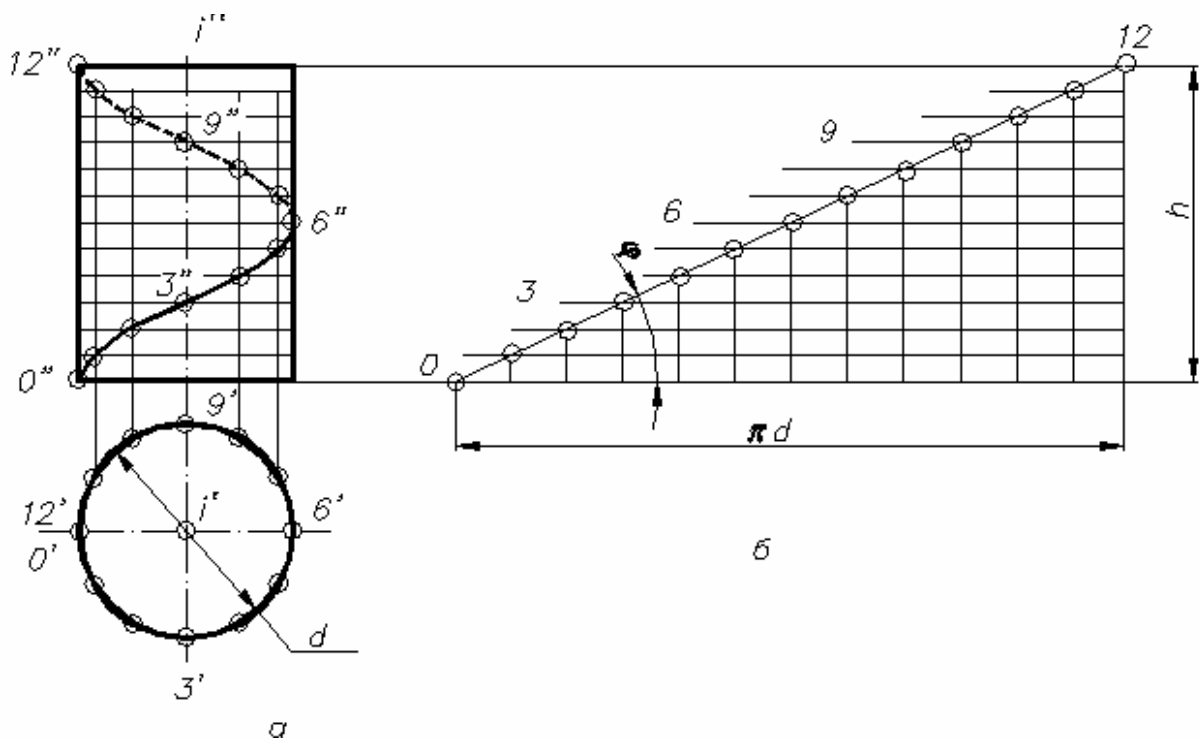


Рис. 6.7

Высоту h , на которую точка поднимается за полный оборот, называют шагом винтовой линии. Если ось i перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция винтовой линии есть окружность, а фронтальная – синусоида. Для построения фронтальной проекции винтовой линии при заданном диаметре d и шаге h нужно разделить и окружность, и шаг на равное число частей. дальнейшие построения видны из чертежа (см. рис. 6.7).

Цилиндрическую винтовую линию можно развернуть на плоскость (рис. 6.7, б). Развертка ее представляет собой прямую линию с углом подъема φ , где $\operatorname{tg} \varphi = h/(\pi d)$.

Коническая винтовая линия образуется на поверхности конуса вращения при равномерном перемещении точки по образующей и при одновременном равномерном вращении образующей вокруг конуса.

Проекции конической линии (горизонтальная – спираль Архимеда, а фронтальная – затухающая синусоидальная кривая с уменьшающейся длиной волны) строятся следующим образом (рис. 6.7, в): делим окружность основания конуса и шаг винтовой линии на одинаковое количество частей, например, 12. Находим на соответствующих образующих конуса положение проекций точек 1, 2... 12 и соединяем их плавной кривой.

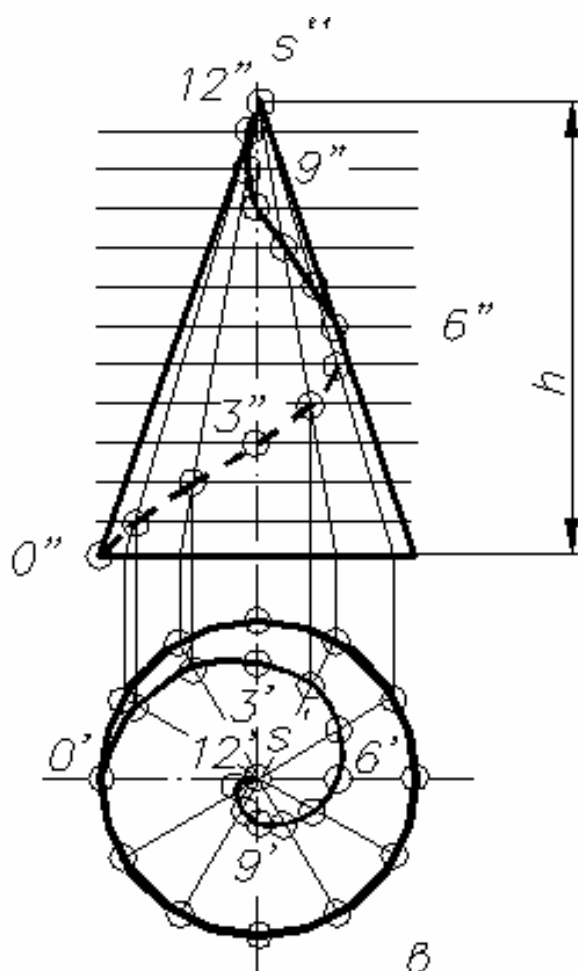


Рис. 6.7, в

Винтовые линии могут правыми и левыми. Правой называется винтовая линия, которая поднимается вверх слева направо (см. рис. 6.7). Левая винтовая линия поднимается вверх справа налево.

Винтовые линии на поверхностях цилиндра и конуса имеют большое практическое значение в технике. Чаще всего они используются для нарезания резьбы.

6.2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность представляет собой множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве. Эту линию называют *образующей поверхности*. Она может быть прямой или кривой. Кривая образующая может быть постоянного или переменного вида.

Существует три способа задания поверхности:

- 1 – аналитический – поверхность задается уравнением;
2. – каркасный – поверхность задается совокупностью точек и линий;
- 3 – кинематический – поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений некоторой линии (образующей), которая перемещается в пространстве по определенному закону.

Закон перемещения образующей может быть задан тоже линиями, но иного направления. Эти линии называют *направляющими*.

Поверхности можно получить различными способами. Так, прямой круговой цилиндр получается путем вращения образующей вокруг его оси.

В зависимости от формы образующей все поверхности можно разделить на **линейчатые** (образующая – прямая линия) и **нелинейчатые** (образующая – кривая линия).

Линейчатые поверхности подразделяются на развертывающиеся, совмещаемые всеми своими точками с плоскостью без разрывов и складок, и неразвертывающиеся, которые нельзя совместить с плоскостью таким образом. К развертывающимся поверхностям относятся поверхности многогранников, цилиндрические, конические и торсовые (см. далее). Все остальные поверхности неразвертывающиеся.

Нелинейчатые поверхности могут иметь образующую постоянной и переменной формы

Совокупность геометрических условий, которая определяет поверхность в пространстве, называют определителем поверхности.

При проецировании поверхности на плоскость проецирующие лучи касаются этой поверхности в точках, образующих на ней некоторую линию, которая называется контурной линией. Проекцию контурной линии называют очерком поверхности. Таким образом, существуют горизонтальный, фронтальный и профильный очерки поверхности.

6.2.1. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатой называют поверхность, которая описывается какой-либо прямой (образующей) при ее движении в пространстве.

При перемещении прямолинейной образующей по ломаной направляющей получают **гранные поверхности**. При этом если одна точка S образующей неподвижна, создается пирамидальная поверхность (рис. 6.9, а), если же образующая при перемещении параллельна заданному направлению S , то создается **призматическая поверхность** (рис. 6.9, б).

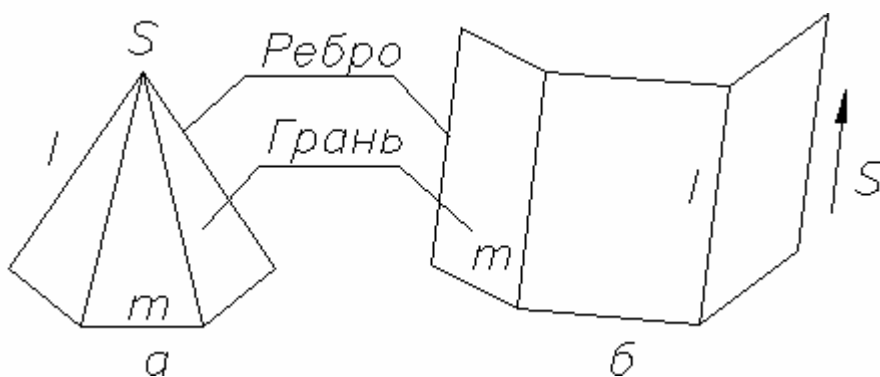


Рис. 6.9

Элементами гранных поверхностей являются: вершина S (у призматической поверхности она находится в бесконечности), грань (часть плоскости, ограниченная участками направляющей и образующей) и ребро (линия пересечения смежных граней). Определитель призматической поверхности содержит, кроме этого, направление S , которому параллельны все образующие. Замкнутые гранные поверхности называются **многогранниками**. Из числа многогранников выделяют группу правильных многогранников, у которых все грани – правильные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. Например, тетраэдр –

правильный четырехгранник (рис. 6.10, а), гексаэдр – куб (рис. 6.10, б), октаэдр – восьмигранник (рис. 6.10, в) и т.д.

Пирамида – многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной. S .

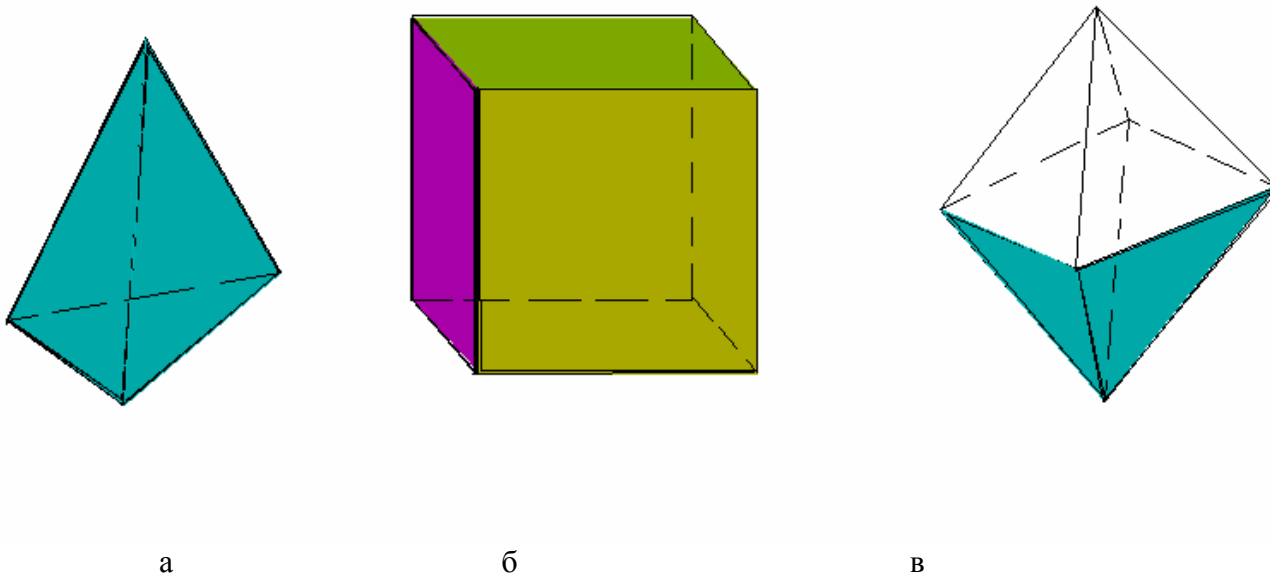


Рис. 6.10

На комплексном чертеже пирамиду задают проекциями ее вершин и ребер с учетом их видимости. Видимость ребер определяют с помощью конкурирующих точек (рис. 6.11). Поскольку горизонтальная проекция $1'$ точки 1, лежащей на ребре AB , расположена ближе к наблюдателю, чем горизонтальная проекция $2'$ точки 2, лежащей на прямой SC , то на фронтальной проекции пирамиды отрезок $A''B''$ будет видимой линией, а $S''C''$ – невидимой. Проекция $3''$ точки 3 расположена на фронтальной плоскости проекций выше, чем $4''$ (точки 3 и 4 горизонтально конкурирующие и лежат соответственно на прямых SC и AB). Это говорит о том, что на горизонтальной проекции пирамиды ребро SC будет видимым, а AB невидимым.

Любую точку на гранной поверхности можно построить с помощью образующей, проходящей через эту точку. Например, нужно построить точку M , лежащую на грани ABC . Как известно, точка принадлежит поверхности, если она принадлежит прямой, лежащей на этой поверхности. Если по условию задачи известна фронтальная проекция точки M'' , то через нее проводится прямая $S''5''$, лежащая в грани $A''B''C''$, затем с помощью линий связи находится горизонтальная проекция $C'5'$. Горизонтальная проекция точки M' находится на $C'5'$ и определяется с помощью линии связи, проведенной из M'' .

Призма – многогранник, у которого основаниями служат два взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани параллелограммы. Если у призмы ребра перпендикулярны плоскости основания, ее называют прямой. Комплексный чертеж прямой четырехугольной призмы с горизонтально проецирующей поверхностью дан на рис. 6.12.

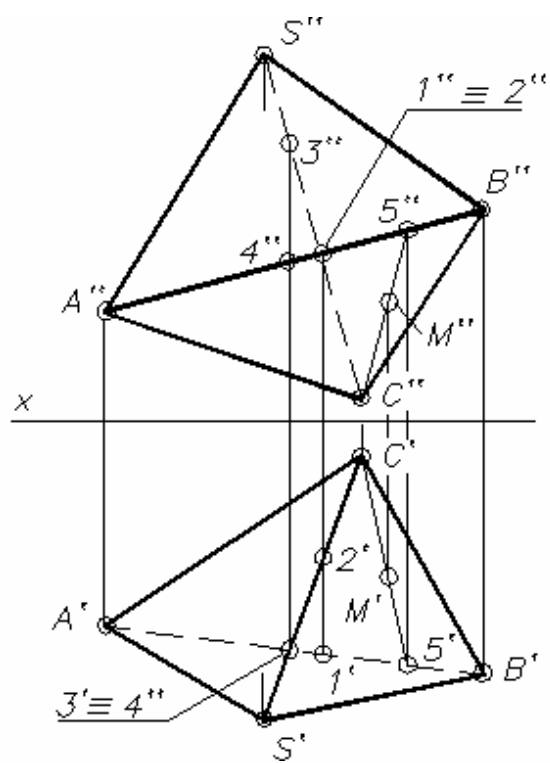


Рис. 6.11

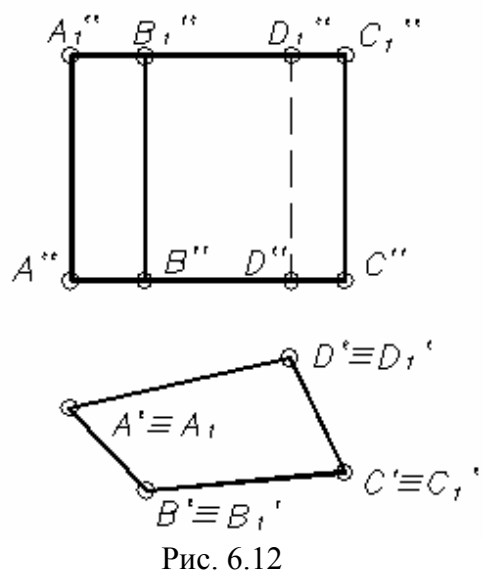


Рис. 6.12

Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей l по криволинейной направляющей m (рис. 6.13, а).

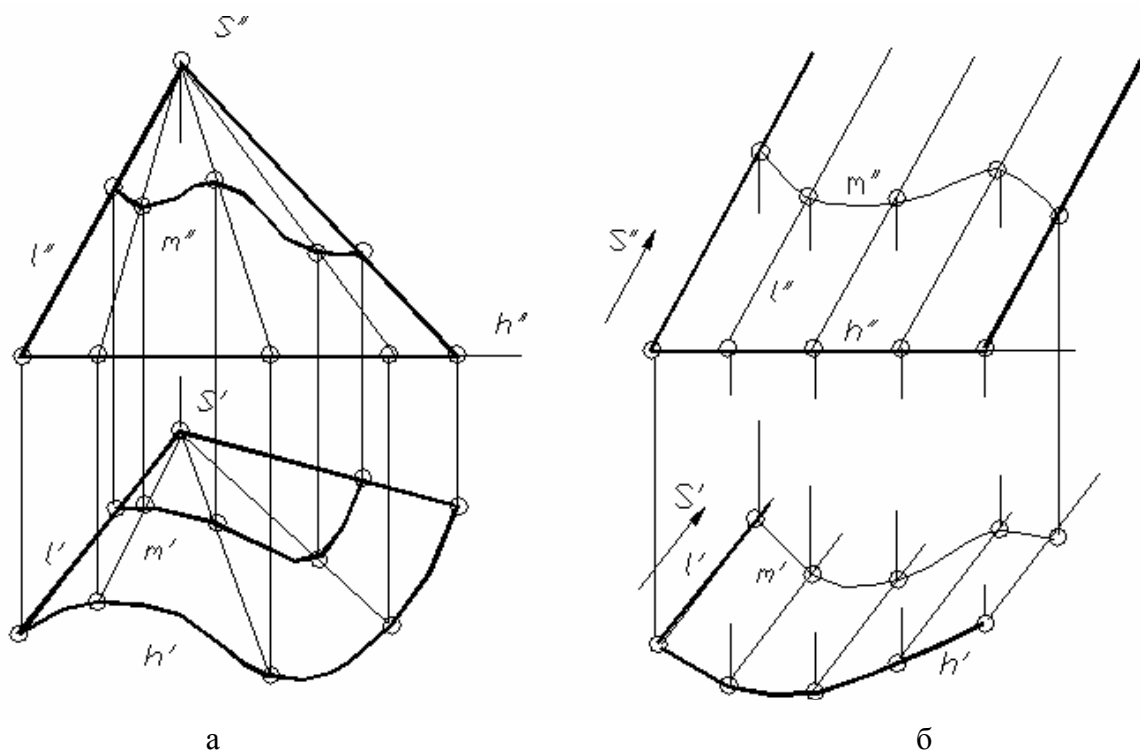


Рис. 6.13

При этом одна точка S образующей всегда неподвижна и является вершиной. Определитель конической поверхности включает в себя вершину S и направляющую m . При этом $S \in l$; $l \cap m$.

Цилиндрическая поверхность образуется прямой l , пересекающей кривую направляющую m и параллельной заданному направлению s (рис. 6.13, б). Цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай конической поверхности с бесконечно удаленной вершиной. Определитель цилиндрической поверхности состоит из направляющей m и направления s образующих l , при этом $l \parallel s$; $l \cap m$. Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоскости проекций, то такую поверхность называют **проецирующей**. Точки на конических и цилиндрических поверхностях строят с помощью образующих, проходящих через них. Линии на поверхностях строят с помощью отдельных точек.

6.2.2. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхности вращения образуются вращением линии l вокруг прямой i – оси вращения. Они могут быть линейчатыми и нелинейчатыми (криволинейными). Определитель поверхности вращения включает образующую l и ось i . Каждая точка образующей описывает при вращении окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Эти окружности называются параллелями. Наибольшую и наименьшую параллели называют соответственно экватором и горлом. Кривые, образующиеся на поверхности вращения в результате пересечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называют меридианами. Точки на поверхности вращения обычно строят с помощью параллелей h и образующих l .

Цилиндр вращения образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i (рис. 6.16, а).

Конус вращения образуется вращением прямой l вокруг пересекающейся с ней оси i (рис. 6.16, б).

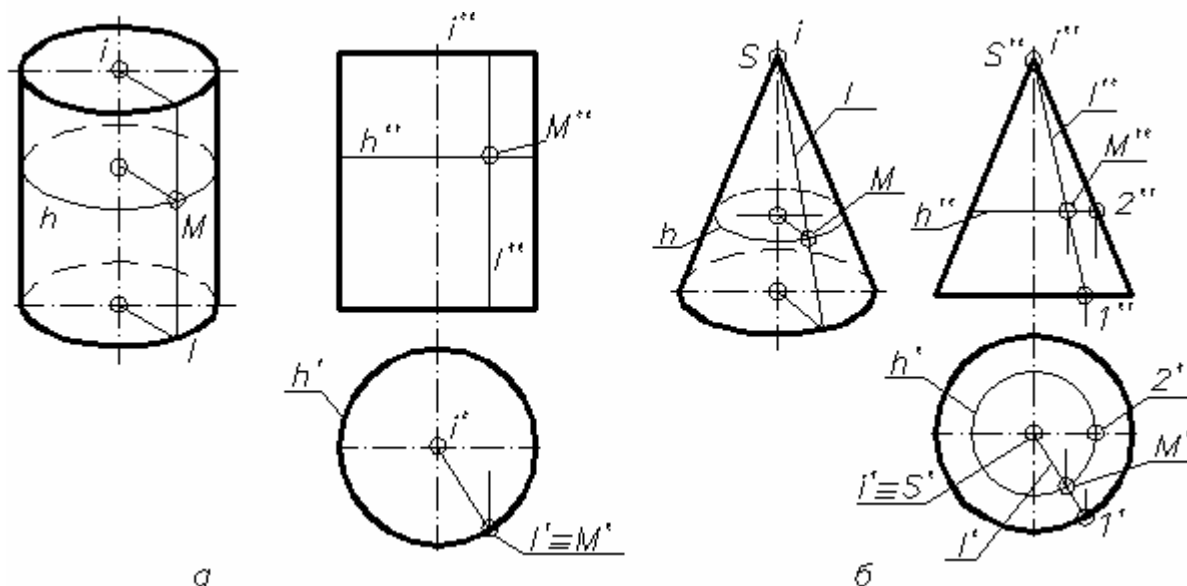


Рис. 6.16

На этом же рисунке показано определение точки M , принадлежащей поверхности цилиндра (рис. 6.16, а), и конуса (рис. 6.16, б).

Приведенные поверхности вращения относятся к классу **линейчатых**.

К **нелинейчатым** поверхностям, образуемым вращением окружности, относятся тор (закрытый и открытый, рис. 6.18) и сфера (рис. 6.20).

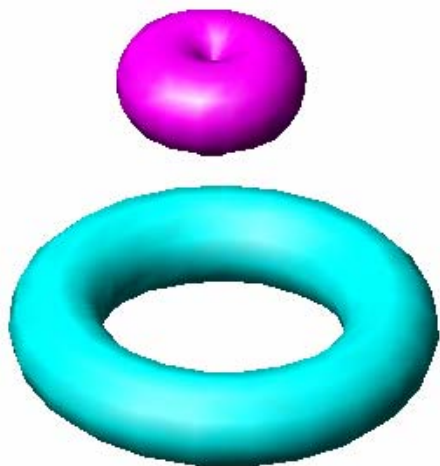


Рис. 6.18

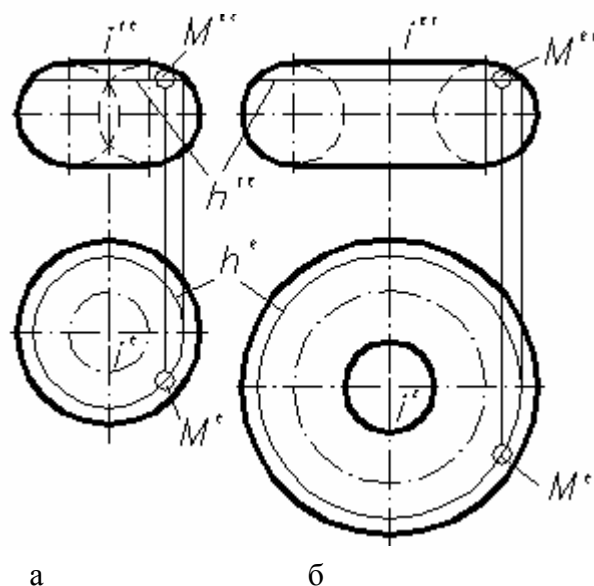


Рис. 6.19

Тор образуется вращением окружности вокруг оси i , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр (рис. 6.19 а, б). При этом, если ось i проходит вне окружности, то тор называется открытым и представляет собой кольцо (рис. 6.18, 6.19, б).

Сфера образуется вращением окружности вокруг ее диаметра (рис. 6.20). Построение точек на сфере и на торе выполняют с помощью параллелей h . Если нужно найти точку M , принадлежащую поверхности тора или сферы, то через заданную проекцию этой точки проводится проекция параллели h , затем находится вторая проекция этой параллели, после чего на ней с помощью линии связи строится недостающая проекция точки M . Сфера представляет собой поверхность второго порядка, а тор – четвертого, что соответствует максимальному числу точек пересечения этих поверхностей с прямой линией.

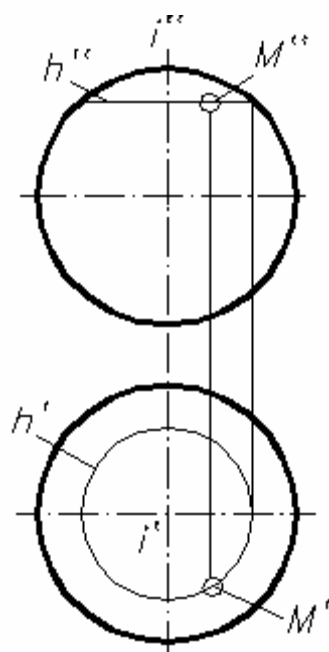


Рис. 6.20

ВИНТОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Винтовой поверхностью называют поверхность, создаваемую при винтовом движении прямолинейной образующей l по двум направляющим – винтовой линии m и ее оси i (рис.

6.15 – не приведен). Линейчатые винтовые поверхности называют геликоидами. Используют геликоид при создании винтовых лестниц, шнеков, а также в силовых резьбах.

рис. 6.15 – не приведен

Контрольные вопросы и задания

1. Какова классификация линий?
2. Как построить проекции окружности в плоскостях общего и частного положения?
3. Какие кривые линии вы знаете?
4. Расскажите о цилиндрической винтовой поверхности.
5. Каковы основные принципы образования поверхности?
6. Расскажите о классификации поверхностей.
7. Что такое определитель поверхности?
8. Как образуются линейчатые поверхности, поверхности вращения, гранные поверхности?
9. Какие поверхности вы знаете?