ЛЕКЦИЯ 5

5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Решение пространственных задач на комплексном чертеже значительно упрощается, если интересующие нас элементы фигуры занимают частное положение.
Переход от общего положения геометрической фигуры к частному выполняется следующими способами:
1) введением дополнительных плоскостей проекций, расположенных либо параллельно либо перпендикулярно рассматриваемому геометрическому элементу;
2) изменением положения линии или плоской фигуры в пространстве при неизменной системе плоскостей проекций.
Получающиеся в этом случае вырожденные проекции помогают решению многих задач по начертательной геометрии.

5.1 СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Сущность способа заключается в том, что пространственное положение объекта не изменяют, а вводят новую, дополнительную плоскость проекций, расположенную таким образом, чтобы интересующие нас элементы фигуры или весь объект целиком проецировался на нее в удобном для решения задачи положении. При этом новая плоскость проекций обязательно должна быть перпендикулярна к одной из имеющихся плоскостей проекций. В результате образуется новая система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, заменяющая прежнюю. Ведем, например, в систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ новую плоскость проекций $П_4$ (рис. 5.1).

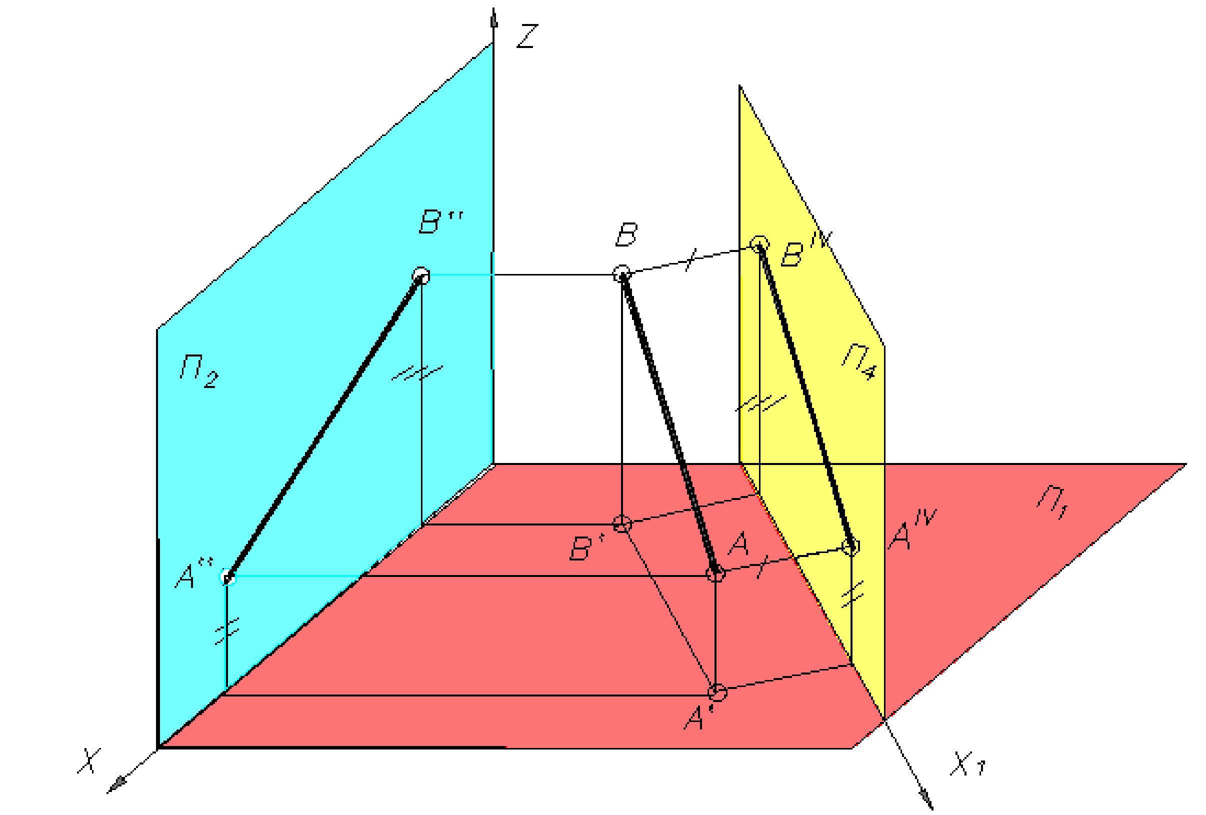

Рис. 5.1

В результате будем иметь другую систему $П_1/П_4$. При этом проецирование остается ортогональным, т.е. новое направление проецирования S перпендикулярно плоскости $П_4$. Новая и старая система плоскостей проекций имеют общую, связывающую их плоскость проекций $П_1$. Новой осью проекций будет X_{14}. Каждая точка пространства , например, точка А, проецируется теперь на три попарно перпендикулярные плоскости. Заметим, что координата Z точки А в плоскостях $П_1$ и $П_4$ будет одна и та же. Для получения плоского чертежа сначала совмещают плоскость $П_4$ с плоскостью $П_1$, вращая ее вокруг оси X_{14}, а затем полученный плоский чертеж поворотом вокруг оси X_{12} совмещают с плоскостью $П_2$. В результате получается комплексный чертеж, представленный на рис. 5.2.

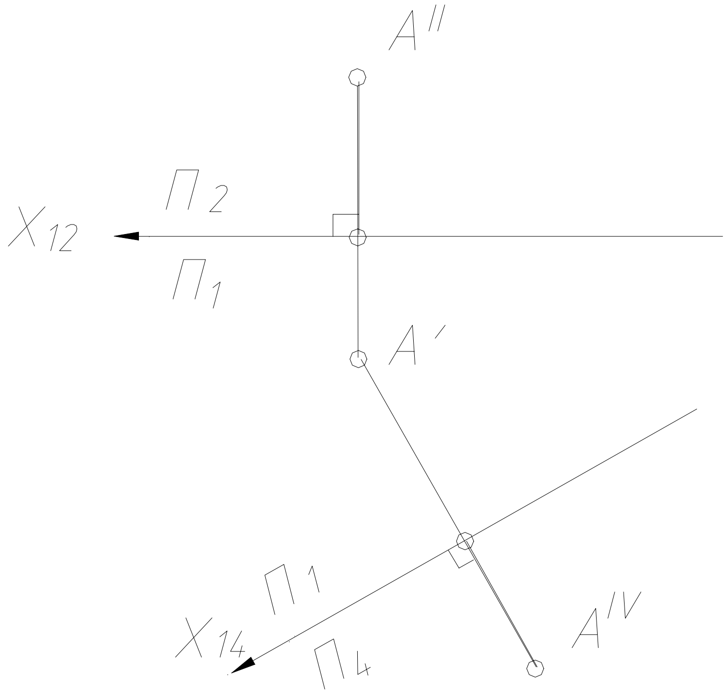

Рис. 5.2

Можно ввести новую плоскость проекций, сохранив в качестве общей (связующей) плоскости не $П_1$, а $П_2$. При этом все построения проводят аналогично предыдущему случаю.

Рассмотрим основные задачи преобразования комплексного чертежа.

5.1.1. ПЕРЕВОД ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ УРОВНЯ (Т.Е. ПАРАЛЛЕЛЬНО НОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ)

Для преобразования прямой АВ в прямую уровня (рис. 5.3) вводят новую плоскость проекций $П_4$ так, чтобы ось проекций X_{14} была параллельна какой-либо проекции АВ (в данном случае − А'В'), затем откладывают на новой плоскости проекций от оси X14 координаты Z точек A^{IV} и B^{IV}, равные координатам Z точек А" и В".

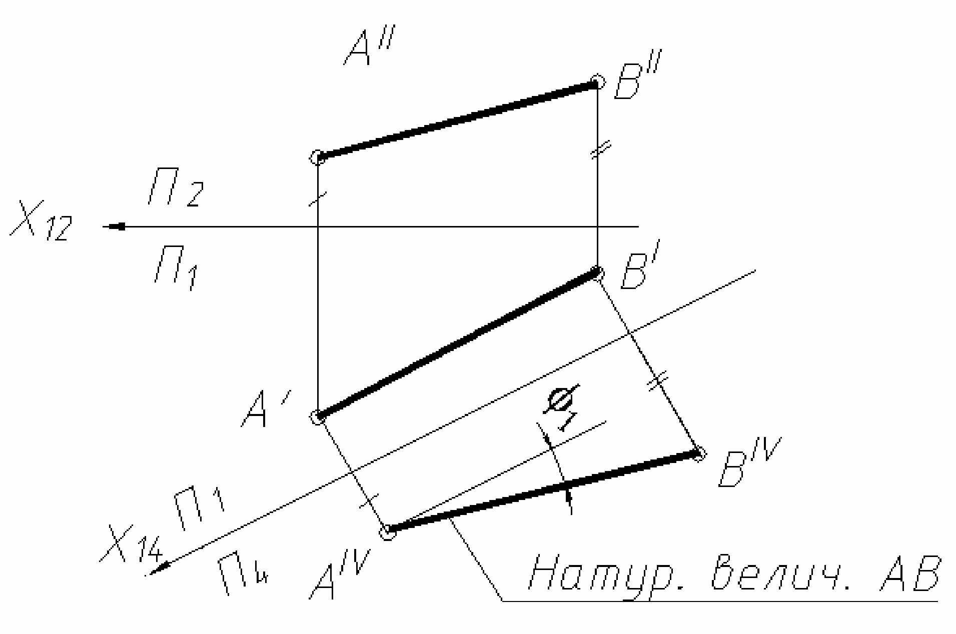

Рис. 5.3

Новая проекция прямой A^{IV} B^{IV} дает натуральную величину отрезка АВ и позволяет определить угол наклона φ_1 прямой к плоскости проекций $П_1$.Угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций φ_2 можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости проекций $П_5 \perp П_2$ (рис. 5.4 – не приведен).

5.1.2. ПЕРЕВОД ПРЯМОЙ УРОВНЯ В ПРОЕЦИРУЮЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ (Т.Е. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ)

Чтобы на новой плоскости проекций изображение прямой уровня преобразовалось в точку (рис. 5.5.), надо эту плоскость расположить перпендикулярно данной прямой, т.е. провести на комплексном чертеже ось проекций перпендикулярно направлению проекции прямой на общую плоскость проекций. Горизонталь будет иметь своей проекцией точку на плоскости $П_4 \perp П_1$.

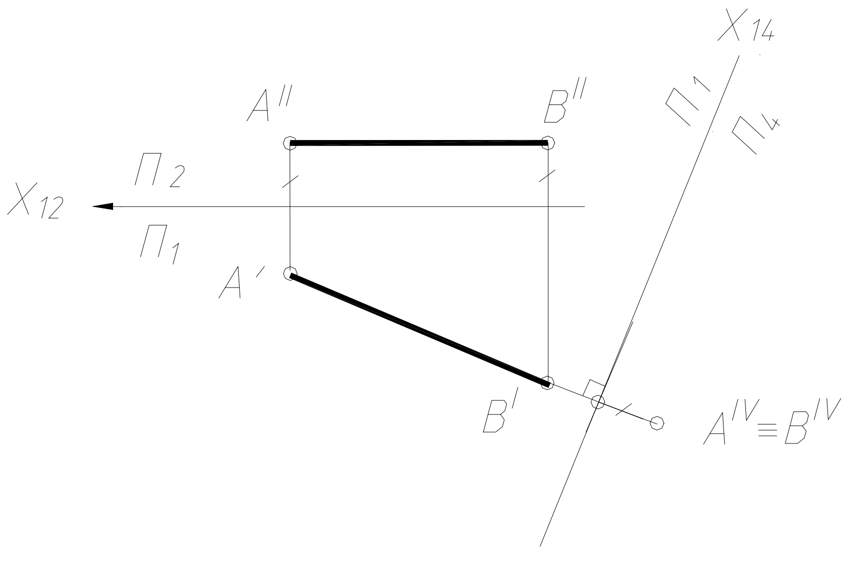

Рис. 5.5

Аналогичные построения можно выполнить и для фронтали. В этом случае новая плоскость проекций $П_5 \perp П_2$. Для построения вырожденной в точку проекции прямой общего положения необходимо последовательно решить две предыдущие задачи. На рис. 5.6 представлено такое решение. Прямая общего положения l (AB) сначала переводится в положение прямой уровня введением плоскости проекций $П_4 \perp П_2$, а затем в положение проецирующей прямой в системе плоскостей $П_4/П_5$.

5.1.3. ПЕРЕВОД ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПРОЕЦИРУЮЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Известно, что если одна плоскость перпендикулярна другой, то она должна содержать прямую, перпендикулярную этой плоскости. В качестве такой прямой можно взять прямую уровня, например, горизонталь, как это показано на рис. 5.7.

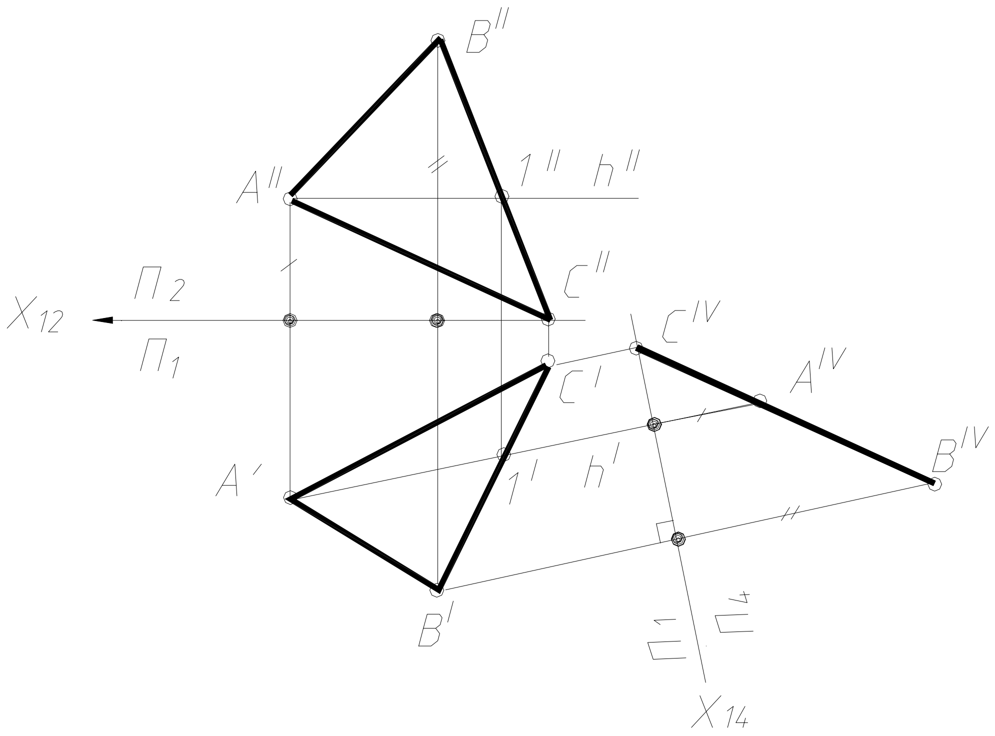

Рис. 5.7

Используя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, переведем горизонталь h в проецирующее положение, вводя новую плоскость проекций $П_4$. Поскольку проекция плоскости ABC на $П_4$ вырождена в прямую, она будет служить геометрическим местом всех точек, принадлежащих этой плоскости. Проецируем точки плоскости на $П_4$, беря их координаты Z с плоскости $П_2$

5.1.4. ПЕРЕВОД ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ В ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ УРОВНЯ

Решение этой задачи позволяет определить натуральную величину плоской фигуры (рис. 5.8.).

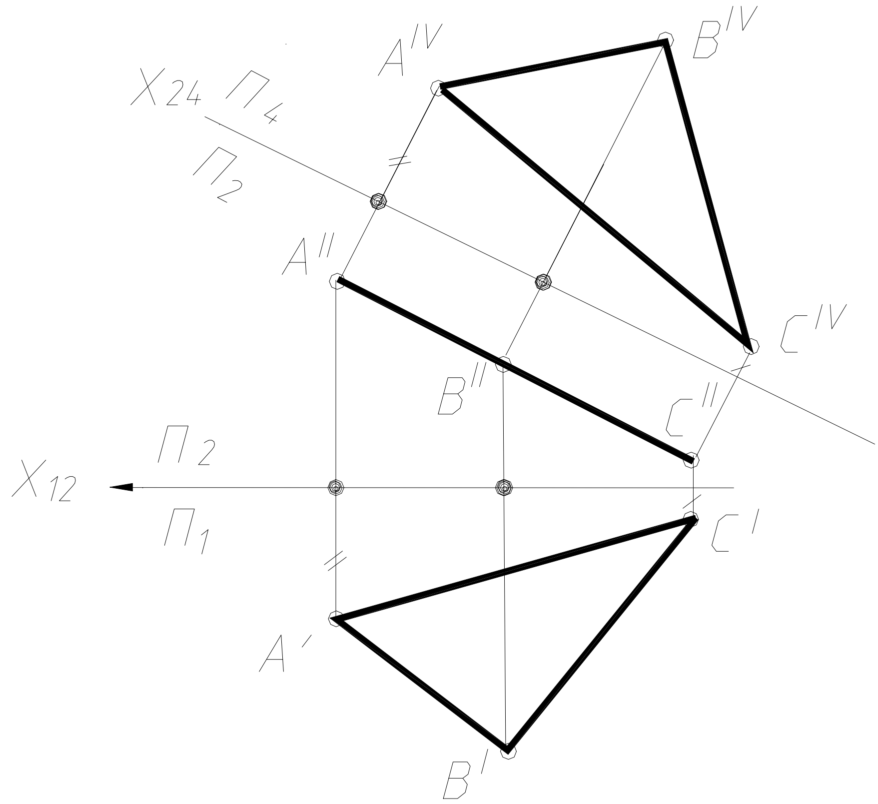

Рис. 5.8

Пусть задана фронтально-проецирующая плоскость α. Вводим новую плоскость проекций Π_4, параллельную α. Новая ось проекций X_{24} по этой причине будет расположена параллельно α, т.е. в системе плоскостей проекций Π_2/Π_4 плоскость α займет положение плоскости уровня, а треугольник ABC будет проецироваться на плоскость Π_4 в натуральную величину.

Если в исходном положении плоскость занимает общее положение, а нужно получить ее изображение как плоскости уровня, то прибегают к двойной замене плоскостей проекций, решая последовательно две предыдущие задачи. При первой замене плоскость становится проецирующей, а при второй − плоскостью уровня (рис.5.9 – не приведен). Расстояния для построения проекций точек на плоскости Π_5 нужно брать с плоскости Π_1, отмеряя их от оси проекций X_{14}.

5.2. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

При плоскопараллельном перемещении заданная фигура движется в пространстве так, что все ее точки перемещаются в плоскостях, параллельных друг другу и (как правило) параллельно одной из плоскостей проекций. Сами траектории точек фигуры произвольны. На рис.5.10 показано плоскопараллельное перемещение отрезка из первоначального положения АВ в положение А`В`. Концы А и В отрезка движутся соответственно в плоскостях α и β, параллельных горизонтальной плоскости проекций $П_1$.

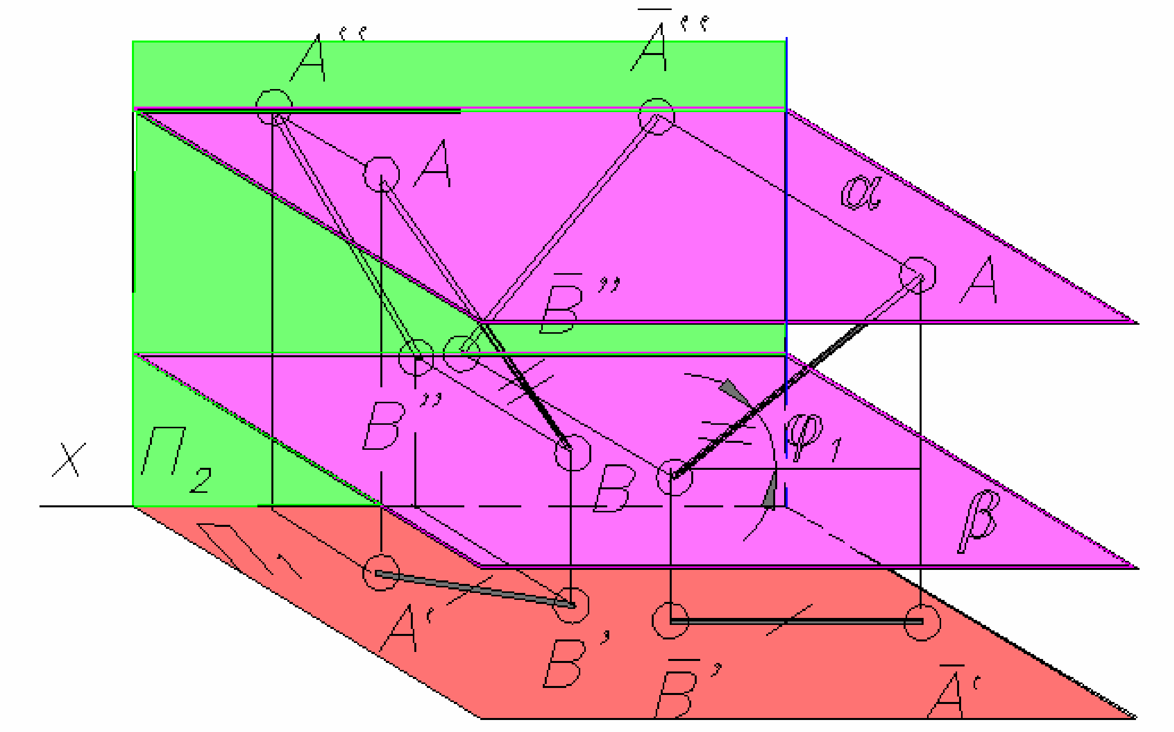

Рис. 5.10

Отметим, что при таком движении угол наклона отрезка к плоскости $П_1$ сохраняется неизменным. Поэтому не изменяется и длина горизонтальной проекции отрезка, т.е. А’В’=Ã'В'. Последнее свойство имеет важное значение, так как, используя его, мы получаем возможность проецировать объект в удобном для решения задач положении. На рис. 5.11 приведен соответствующий комплексный чертеж.

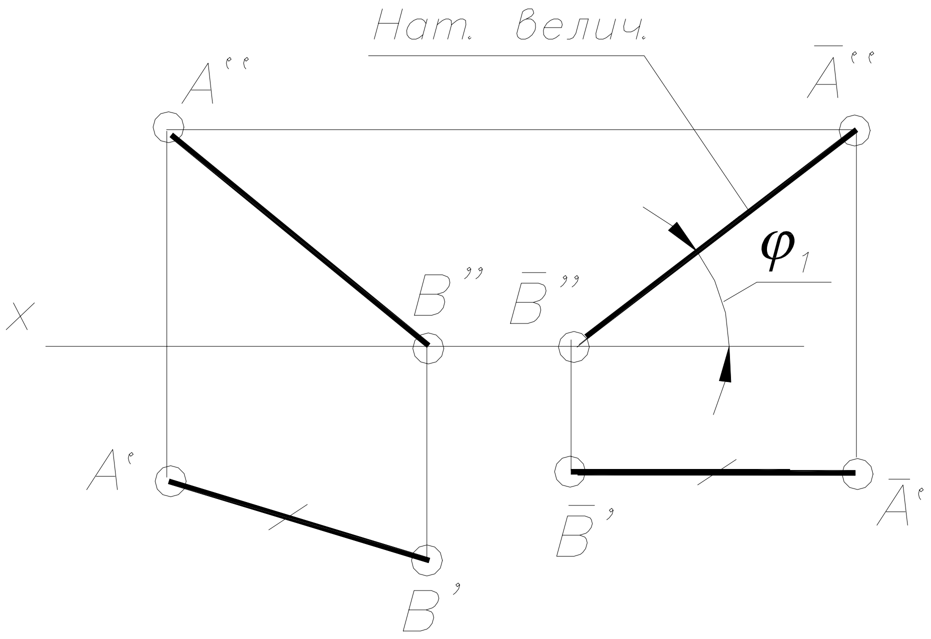

Рис. 5.11

После перемещения отрезка АВ в положение ÂB он станет фронталью и его фронтальная проекция будет равна натуральной величине (НВ), т.е. Â”B”=AB. Соответственно угол φ_1 наклона проекции Ã”B” к горизонтальной плоскости проекций будет равен углу наклона отрезка АВ к той же плоскости ($\varphi_1 = \varphi$). Напомним, что траектория в данном случае горизонтальной проекции произвольна, а все точки фронтальной проекции отрезка движутся по горизонтальным прямым.

В качестве примера рассмотрим задачу о переводе плоскости общего положения в положение плоскости уровня методом плоскопараллельного перемещения.

Решение этой задачи показано на рис. 5.12.

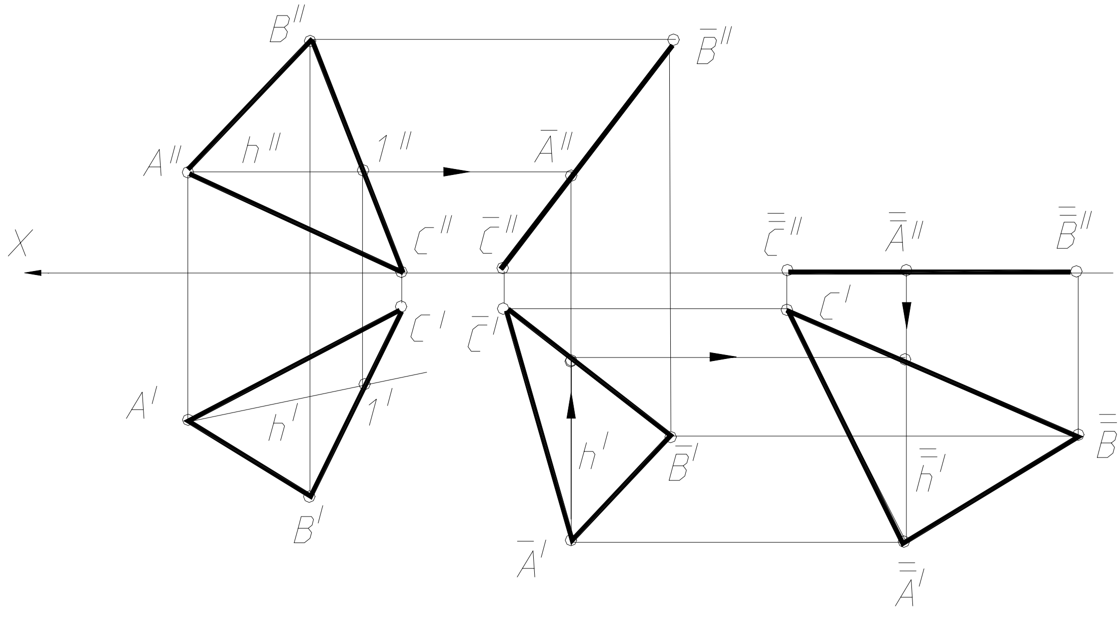

Рис. 5.12

При первом движении треугольник ABC переводится во фронтальное проецирующее положение. С этой целью в плоскости треугольника строится горизонталь А1,

горизонтальная проекция которой А'1' переходит в проецирующее положение Ã'1′. В процессе перемещения величина горизонтальной проекции треугольника остается неизменной. Все его точки на фронтальной плоскости проекций перемещаются по горизонталям, пересечение которых с линиями связи, проведенными из соответствующих точек вновь полученной горизонтальной проекции, образует вырожденную в прямую его фронтальную проекцию.
При втором движении все точки треугольника перемещаются в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, в результате чего он займет положение горизонтальной плоскости уровня, а его вырожденная фронтальная проекция − положение горизонтали. Длина ее при этом сохранится неизменной. Горизонтальная проекция Ä'B'C' треугольника АВС будет равна его натуральной величине.

К частным случаям метода плоскопараллельного перемещения относятся метод вращения вокруг проецирующих прямых, а также метод вращения вокруг прямых уровня.

5.3. ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ВОКРУГ ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

1. ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ

Пусть точка А вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости Π_1 (рис. 5.13).

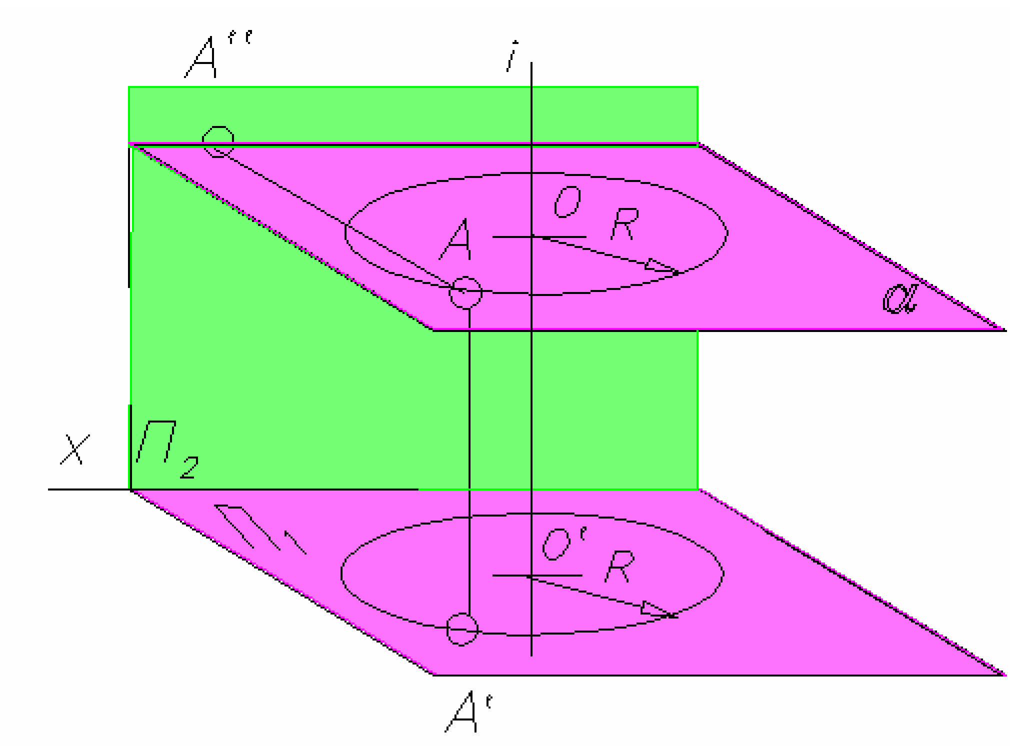

Рис. 5.13

Через точку А проведена плоскость, перпендикулярная к оси вращения и, следовательно, параллельная плоскости Π_1. При вращении точка А описывает в плоскости α окружность радиуса R; величина радиуса выражается длиной перпендикуляра, проведенного из точки А на ось. Окружность, описанная в пространстве точкой А, проецируется на плоскость Π_1 без искажений. Так как плоскость α перпендикулярна к плоскости Π_2, то проекции точек окружности на плоскости $П_2$ расположатся на α”, т.е. на прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения.

На рис. 5.14 показан поворот точки А против часовой стрелки на угол φ вокруг оси, проходящей через точку О **перпендикулярно к плоскости $П_2$.**

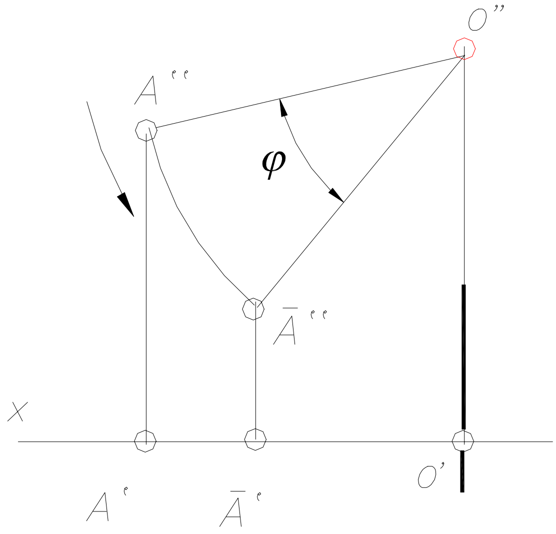

Рис. 5.14

Из точки О”, как из центра, проведена дуга радиуса О”А”, соответствующая углу φ и направлению вращения. Новое положение фронтальной проекции точки А − точка Ã”.

2. ВРАЩЕНИЕ ПРЯМОЙ

Рассмотрим вращение отрезка прямой линии вокруг заданной оси. В общем случае выполняется поворот двух точек А и В на один и тот же заданный угол и по заданному направлению на одной из плоскостей проекций. Каждая точка будет иметь свой радиус вращения. Затем по линиям связи находится новое положение второй проекции отрезка.

Для решения задач, связанных с вращением отрезка прямой, используется следующий способ (рис. 5.14.1).

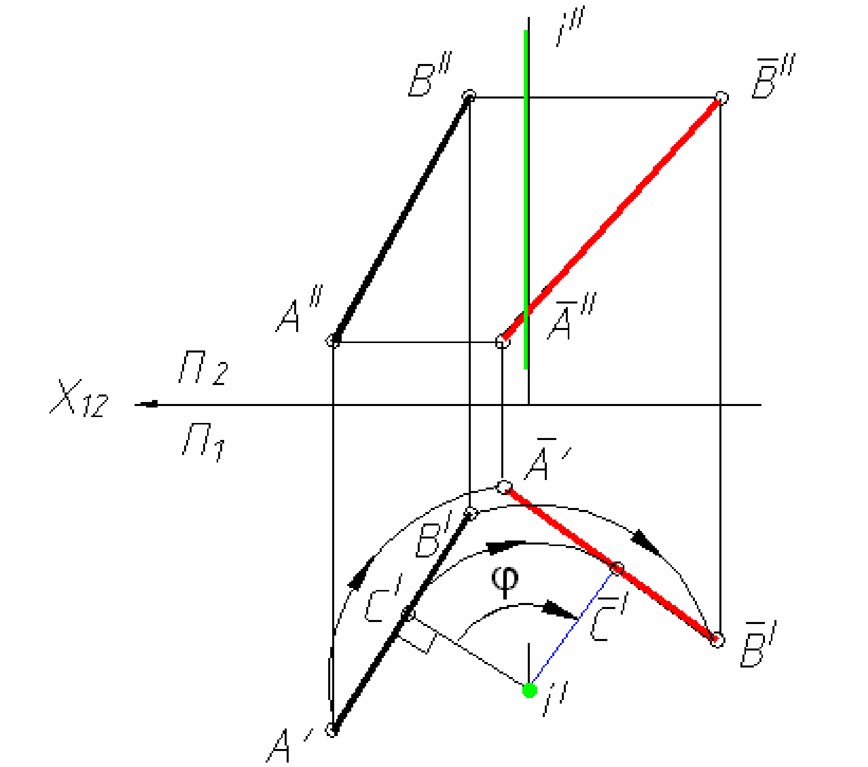

Рис. 5.14.1

Если ось вращения перпендикулярна плоскости $П_1$, то через точку O’ проводим прямую, перпендикулярную к A’B’; точку C’ (пересечение перпендикуляра с A’B’) поворачиваем на заданный угол. Проведя через точку $\underline{C}$’ (новое положение точки C’) прямую, перпендикулярную к радиусу O’C’, получаем направление нового положения горизонтальной проекции отрезка. Так как отрезки C’A’ и C’B’ не изменяют своей величины, то, откладывая от точки C’ отрезки $\underline{C}$’$\underline{A}$’ = C’A’ и $\underline{C}$’$\underline{B}$’ = C’B’, находим новое положение $\underline{A}$’$\underline{B}$’ проекции всего отрезка. Затем по линиям связи достраивается новая фронтальная проекция отрезка $\underline{A}$”$\underline{B}$”.
Данным способом можно не только повернуть отрезок на заданный угол, но и определить угол, на который нужно повернуть заданный отрезок, чтобы придать ему требуемое положение (например, расположить параллельно плоскости $П_2$ или найти точку пересечения с другой прямой и т. д.).

При вращении плоскости, заданной следами, обычно поворачивают один из следов и горизонталь (или фронталь) плоскости. На следе берется произвольная точка и поворачивается вокруг оси на заданный угол φ. Новый след будет проходить через выбранную точку перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с центром вращения.

Второй след находится по новому положению горизонтали (фронтали).

5.4. ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ ВОКРУГ ПРЯМОЙ УРОВНЯ

Поворот плоской фигуры вокруг ее горизонтали. Для определения формы и размеров плоской фигуры можно ее повернуть вокруг принадлежащей ей горизонтали так, чтобы в результате вращения фигура расположилась параллельно плоскости П1.
Рассмотрим сначала поворот точки (рис. 5.15).

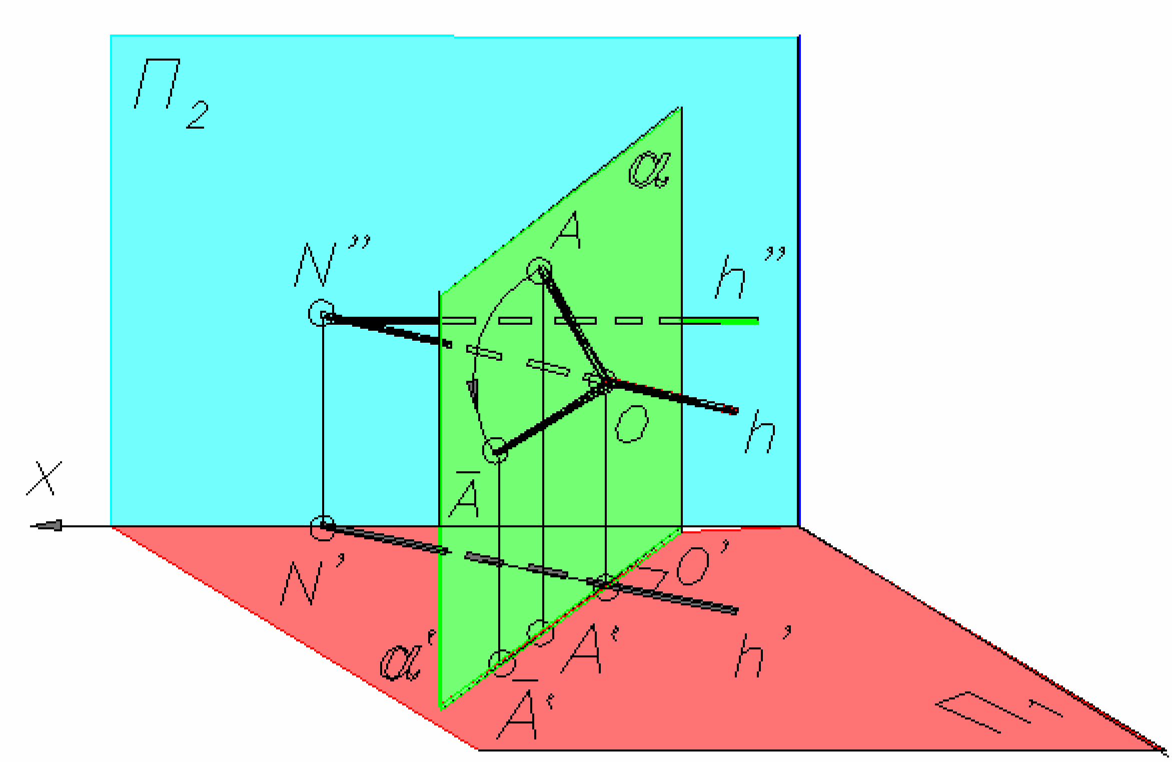

Рис. 5.15

Точка A вращается вокруг некоторой горизонтально расположенной оси ON”, описывая дугу окружности, лежащую в плоскости α Эта плоскость перпендикулярна к оси вращения и,

следовательно, является горизонтально-проецирующей; поэтому горизонтальная проекция окружности, описываемая точкой А, должна находится на α’.
Если радиус ОА займет положение, параллельное плоскости Π_1, то проекция О’А’ окажется равной ОА, т.е. равной натуральной величине радиуса ОА.

Теперь рассмотрим поворот треугольника АВС (рис. 5.16). В качестве оси вращения взята горизонталь AD.
Точка А, расположенная на оси вращения, останется на месте. Следовательно, для изображения горизонтальной проекции треугольника после поворота надо найти положение проекций других двух его вершин. Опуская из точки В’ перпендикуляр на А’D’, находим горизонтальную проекцию центра вращения − точку О’ и горизонтальную проекцию радиуса вращения точки В −отрезок О’В”, а затем фронтальную проекцию радиуса вращения точки В −отрезок О”В”.

Теперь надо определить натуральную величину радиуса вращения точки В. Для этого применяется способ прямоугольных треугольников. По катетам О’В’ и В’В*=В”1” строим прямоугольный треугольникО’В’В*, гипотенуза его равна радиусу вращения точки В.

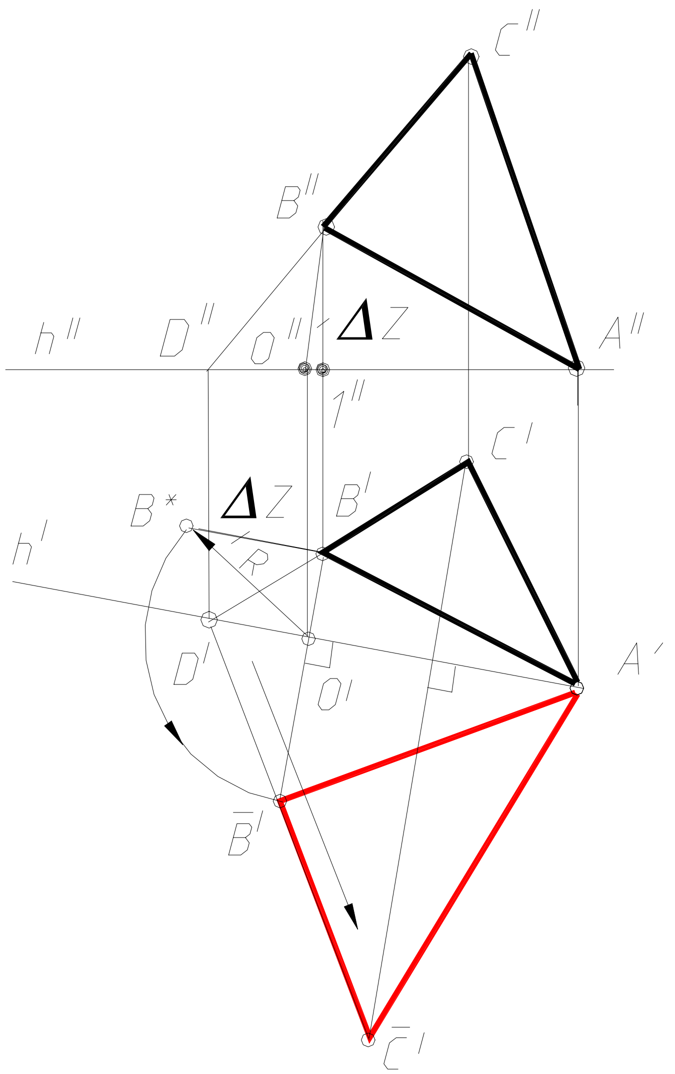

Рис. 5.16

Теперь можно найти положение точки В’, а затем точки С’, причем не определять радиус вращения точки С, а найти положение точки С’ в пересечении двух прямых, из которых одна является перпендикуляром, проведенным из точки С’ к прямой А’D’, а другая проходит

через найденную точку B’ и точку D’ (горизонтальную проекцию точки D, принадлежащей стороне BC и расположенной на оси вращения).
Проекция A’B’C’ выражает натуральную величину Δ ABC, так как после поворота плоскость треугольника параллельна плоскости П1. Фронтальная же проекция треугольника совпадает с фронтальной проекцией горизонтали, т.е. представляет собой прямую линию.
На рис. 5.16 дано построение для случая, когда горизонталь проведена вне проекций треугольника. Это позволяет избежать наложения проекций одной на другую, но чертеж занимает несколько большую площадь.

Если требуется повернуть плоскую фигуру до положения, параллельного плоскости П2, то за ось вращения надо выбрать **фронталь.**

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается сущность способа замены плоскостей проекций?
2. Какое основное условие должно быть соблюдено при введении новой плоскости проекций?
3. Какая координата точки сохраняется в новой плоскости проекций?
4. Каковы исходные задачи преобразования комплексного чертежа?
5. Как перевести прямую общего положения в положение прямой уровня?
6. Как перевести прямую уровня в проецирующее положение?
7. Переведите плоскость общего положения в положение плоскости уровня.
8. В чем заключается суть способа плоскопараллельного перемещения?
9. Какое основное условие должно быть соблюдено при плоскопараллельном перемещении фигуры?