КУРС ЛЕКЦИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЛЕКЦИЯ 1

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия относится к числу базовых общетехнических дисциплин. Она изучает законы построения плоских изображений (чертежей) пространственных форм различных объектов.

Начертательная геометрия является теоретической основой инженерной графики.

Впервые условное изображение предметов с помощью ортогональных проекций была применено французским ученым Гаспаром Монжем, а метод ортогонального проецирования был опубликован им в 1799 году.

Основные задачи инженерной графики (начертательной геометрии):

– изучение способов построения изображений (чертежей) объектов на плоскости;
– изучение геометрических свойств объектов по заданным изображениям (чтение чертежа);
– решение геометрических и конструктивных задач на чертежах.

Инженерная графика развивает способность по плоскому изображению мысленно создавать представление о форме пространственного объекта и тем самым готовит будущего инженера к освоению других инженерных дисциплин на специальных кафедрах, а также к техническому творчеству − самостоятельному проектированию объектов, оборудования и т. п.

Данное методическое пособие базируется на материале лекций, читаемых в университете. Может быть использовано в качестве дополнительного учебного пособия при обучении студентов по всем специальностям.

Для закрепления пройденного материала в конце каждой главы приведены контрольные вопросы.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

$e \cap g = E \Rightarrow (e_1 \cap g_1 =$

$AA_1 \perp \Pi_1$

$M \cong M_1$

$C \subset AB$

$AM \parallel A_1B_1$

$L \not\subset m$

Прямая AB принадлежит плоскости α, если две ее точки 1и 2 принадлежат этой плоскости. Это положение в символьной форме записывается так: $1 \subset AB$; $2 \subset AB \Rightarrow m(1,2) \subset \alpha(A,B,C)$.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧЕРТЕЖА

Проекционный чертеж, т.е. чертеж, построенный методом проецирования пространственных объектов на плоскость, служит в инженерной графике основным средством для анализа свойств пространственных фигур.

Все задачи, связанные с построением чертежей, разбиваются на прямые и обратные. Прямая задача инженерной графики – изучение методики построения проекционных чертежей пространственных объектов. Обратная ее задача − изучение методики чтения чертежей или мысленного восстановления пространственных объектов по их чертежам.

1.1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Основной изобразительный способ задания геометрических элементов − это линия. С помощью линий задаются проекции точки, плоскости и любой пространственной фигуры. Аппарат проецирования включает проецирующие лучи, плоскость, на которую осуществляется проецирование, и проецируемый объект.

Все лучи, проецирующие предмет, исходят из одной точки S, называемой *центром проекций* (рис. 1.1). Если центр проекций S находится на определенном расстоянии от плоскости проекций

Π, то такое проецирование называют *центральным*.

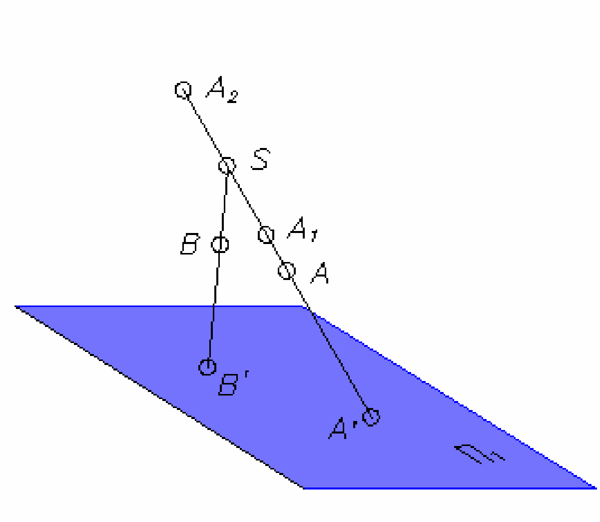


Рис. 1.1

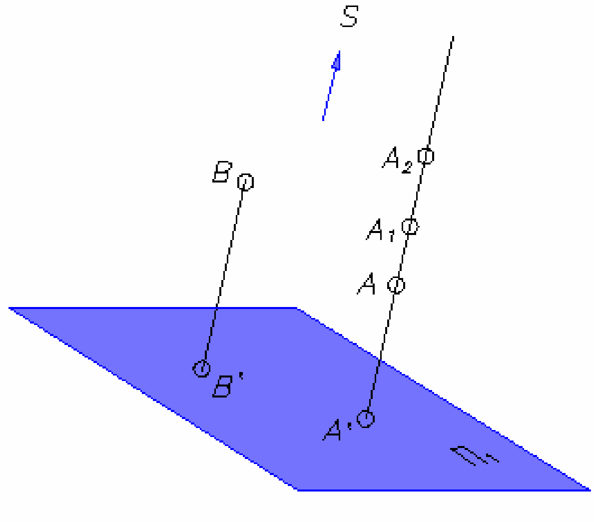


Рис. 1.2

Через центр проекций S проводят проецирующий луч SA до пересечения его с плоскостью Π_1. Точка A′ – центральная проекция точки A на плоскость Π_1. Таким же способом построена центральная проекция точки B –B′.

Из рис. 1.1 видно, что каждая точка пространства A, A1, A2 будет иметь только одну центральную проекцию A′. Но проекция точки не определяет однозначно ее положение в пространстве, т.к. на проецирующем луче SA можно выбрать множество точек (A, A1, A2), имеющих одну и ту же проекцию.

Если S стремится в бесконечность, то проецирующие лучи становятся параллельными и такое проецирование называют *параллельным* (рис. 1.2). Проецирующие лучи в этом случае параллельны между собой. Также, как и при центральном, здесь проекция не определяет положение точки в пространстве, необходимы дополнительные условия.

Ортогональное (прямоугольное) проецирование есть частный случай параллельного проецирования, когда все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций. Пусть имеем некоторую горизонтальную плоскость проекции Π_1 (рис. 1.3). Чтобы получить на этой плоскости проекцию любой точки пространства, например точки A, нужно через эту точку провести прямую, перпендикулярную плоскости Π_1 до пересечения с ней в точке A'. Точка A' является ортогональной проекцией точки A. Условно эти действия можно записать так: $AA' \perp \Pi_1$; $A' = AA' \cap \Pi_1$.

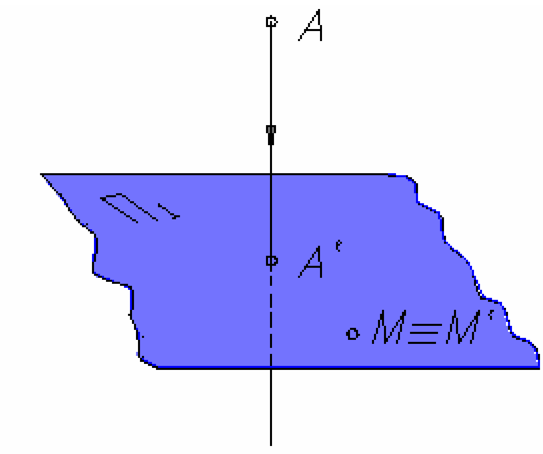


Рис. 1.3

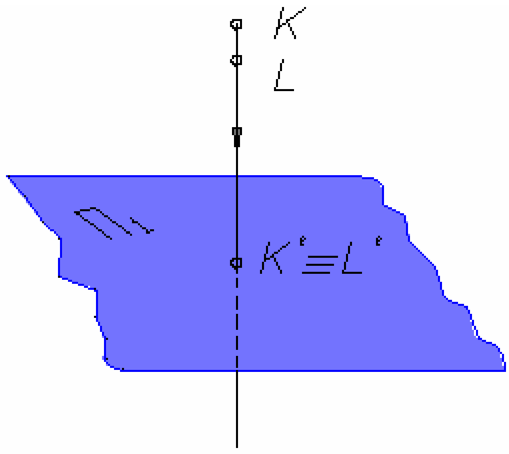


Рис. 1.4

1.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

1. Проекция любой точки пространства – единственная точка на плоскости проекций. Справедливость этого утверждения вытекает из самой процедуры проецирования. В частности, любая точка, лежащая в плоскости Π_1 (например, точка M на рис. 1.3), имеет единственную проекцию, совпадающую с этой точкой ($M \cong M'$). Необходимо помнить, что обратная формулировка этого свойства неверна. Точки, лежащие на одной и той же проецирующей прямой, называют конкурирующими. Проекции конкурирующих точек совпадают. На рис. 1.4 показаны конкурирующие точки K и L и их совпадающие проекции.

2. Проекция прямой в общем случае − единственная прямая на плоскости $П_1$. Действительно, пусть точки A и B определяют некоторую прямую d в пространстве (рис. 1.5).

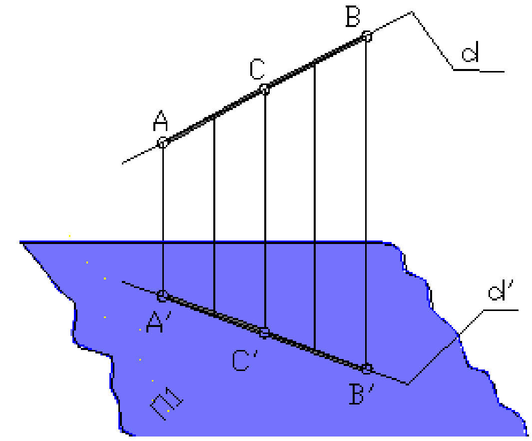


Рис. 1.5

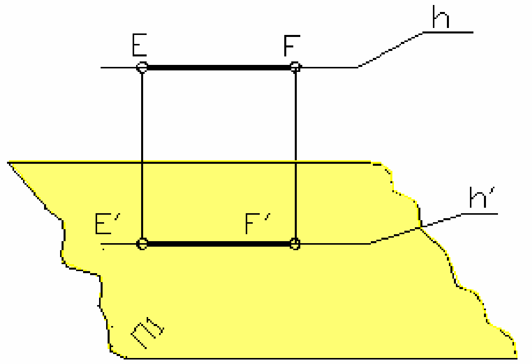


Рис. 1.6

Тогда вертикальные прямые, проецирующие все точки прямой d, составляют проецирующую плоскость ABB'A', пересекающую плоскость проекций $П_1$ по прямой d' Прямая d' является совокупностью проекций всех точек прямой d, т.е. проекцией этой прямой. Исключение составляет любая проецирующая прямая, проекция которой вырождается в точку (например, прямая KL на рис. 1.4). Утверждение, обратное свойству 2, неверно, так как любая прямая плоскости $П_1$ представляет собой проекцию множества прямых пространства.

3. Если точка принадлежит прямой в пространстве, то проекция этой точки принадлежит проекции прямой, т.е., как видно из рис. 1.5, если $C \subset AB$, то $C' \subset A'B'$. Обратное утверждение неверно (рассуждения аналогичны предыдущим).

4. Если отрезок параллелен плоскости проекций, то он проецируется в натуральную величину. Обратное утверждение также верно. Например (рис. 1.6), если отрезок прямой $[EF] \parallel П_1$. то $[E'F']=[EF]$ и обратно, если $[E'F']=[EF]$, то $[EF] \parallel П_1$. Справедливость этих утверждений вытекает из равенства противоположных сторон прямоугольника EFF'E'.

5. Если прямые в пространстве параллельны друг другу, то их проекции также параллельны между собой. Например (рис. 1.7), если $a \parallel b$, то $a' \parallel b'$. Действительно, плоскости, проецирующие прямые a и b, параллельны и, следовательно, параллельны прямые a' и b', являющиеся линиями пересечения этих плоскостей с плоскостью $П_1$.

6. Если отрезки в пространстве параллельны друг другу, то отношение их длин сохраняется при проецировании. Например (см. рис. 1.7), если $AB \parallel CD$, то $[AB]/[CD] = [A'B']/C'D']$.

Для доказательства из концов отрезков проведем в проецирующих плоскостях прямые $AB^* \parallel A'B'$ и $CD^* \parallel C'D'$. Согласно свойству 4 $[AB^*]=[A'B']$ и $[CD^*]=[C'D']$. Тогда свойство 6 вытекает из подобия треугольников ABB^* и CDD^*. В частности, равные отрезки имеют равные проекции. Свойство 6 относится также к отрезкам, принадлежащим одной и той же прямой. Так, если точка E делит пополам отрезок в пространстве, то ее проекция E' делит пополам проекции этого отрезка.

7. Длина отрезка в пространстве равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника, у которого один катет равен проекции отрезка, а второй − превышение одного конца отрезка над другим. Действительно, пусть имеем в пространстве отрезок AB (рис. 1.8).

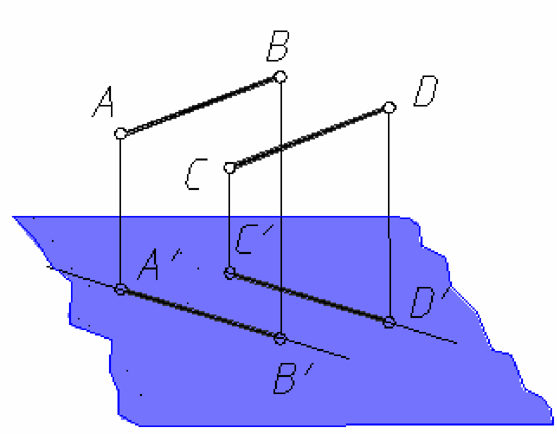


Рис. 1.7

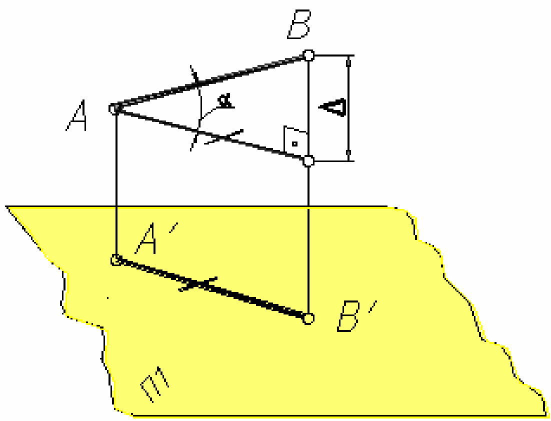


Рис. 1.8

Проведем в проецирующей плоскости ABB'A' прямую AM || A'B'. В результате получим прямоугольный треугольник ABM (упомянутый в формулировке свойства 7), у которого Δ − превышение одного конца отрезка AB над другим, а ∠α − угол наклона этого отрезка к плоскости $П_1$.

8. Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то этот прямой угол проецируется на нее в натуральную величину. Например, если ∠ABC = 90º и AB || $П_1$, то ∠A'B'C' = 90º (рис. 1.9).

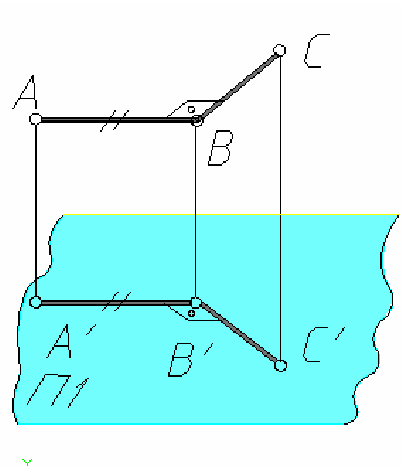


Рис. 1.9

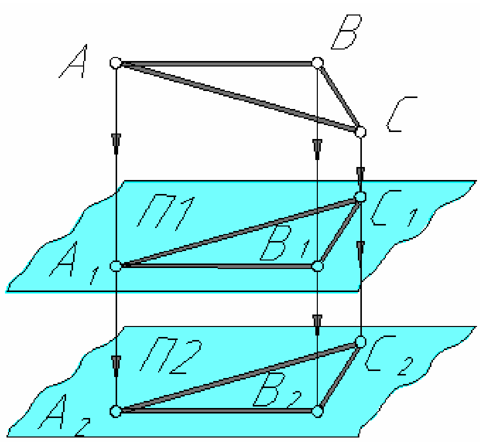


Рис. 1.10

Действительны и два обратных утверждения:

а) если ∠A'B'C' = 90º и AB || $П_1$, то ∠ABC = 90º;

б) если ∠A'B'C' = 90º и ∠ABC = 90º, то AB || $П_1$ или BC || $П_1$ (или вся плоскость ABC || $П_1$).

Приведем доказательство теоремы.

Так как AB ⊥ BC и AB ⊥ BB_1, то AB ⊥ Σ(BC∩BB'), а следовательно, AB ⊥ B'C'. Но AB || A'B'. Поэтому A'B' ⊥ B'C'.

9. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций. Пусть проецируемая фигура − треугольник ABC (рис. 1.8). Спроецируем его на плоскости $П_1$ и $П_2$ параллельные друг другу. Отрезки A'A", B'B", C'C" параллельны и равны между собой. Они являются ребрами призмы, у которой основания A'B'C' и A"B"C" равны, так как лежат в параллельных плоскостях, что и требовалось доказать.

Фигура, поверхность которой нормальна плоскости проекций (например, призма ABCC'B'A'), называется проецирующей.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие методы проецирования вы знаете?
2. Сформулируйте основные свойства прямоугольного (ортогонального) проецирования. Приведите примеры.

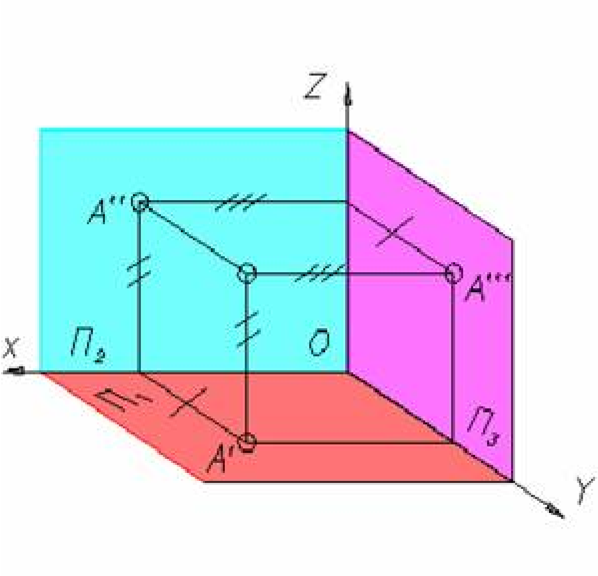
3. Сформулируйте теорему о проецировании прямого угла.
4. Какие точки называют конкурирующими?

2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ

Чертеж, геометрически равноценный изображаемой фигуре, т.е. позволяющий воспроизвести (реконструировать) оригинал, называется обратимым чертежом. Он позволяет решить обратную задачу инженерной графики и начертательной геометрии, так как однозначно задает фигуру в пространстве.
Чертеж, состоящий из одной ортогональной проекции фигуры, не является обратимым. Действительно, при рассмотрении свойств ортогонального проецирования видно, что проекции фигур, заданные на плоскости $П_1$, не определяют однозначно свои оригиналы в пространстве (они могут быть проекциями конкурирующих фигур). Для получения обратимого чертежа применяется *комплексный чертеж*, который состоит из двух и более связанных между собой ортогональных проекций предмета. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций ($П_1$ и $П_2$), которые совмещаются с плоскостью чертежа. Плоскость $П_1$ называется горизонтальной, а $П_2$ – фронтальной плоскостью проекций. Плоскость $П_2$ располагается перед наблюдателем вертикально (рис. 2.1).
Линия пересечения этих плоскостей называется осью проекций и обозначается x_{12} или в виде дроби $П_2/П_1$.

2.1. ТОЧКА

Любая точка пространства (например, точка А на рис. 2.1) проецируется ортогонально на плоскости $П_1$ и $П_2$, образуя свои горизонтальную A' и фронтальную A'' проекции.



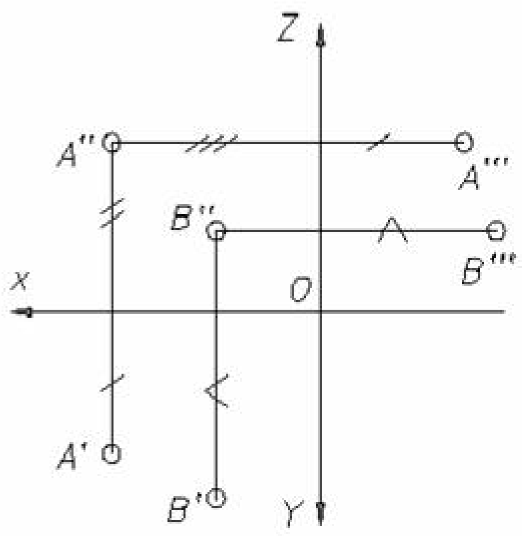


Рис. 2. 1 Рис. 2. 2

Можно строить проекции также на плоскости $П_3$, перпендикулярной $П_1$ и $П_2$. Она носит название профильной плоскости проекций. A''' – профильная проекция точки А. Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат.
Важно отметить, что проекции отрезков каждой проецирующей прямой равны между собой:
$AA_1=A_2A_x=A_3A_y$ (высота точки А –аппликата);
$AA_2=A_1A_x=A_3A_z$ (глубина точки А – ордината);
$AA_3=A_1A_y=A_2A_z$ (широта точкиА –абсцисса).
Для образования плоского чертежа плоскость проекций $П_1$ путем вращения вокруг оси x совмещают с плоскостью $П_2$, а плоскость проекций $П_3$ совмещается с плоскостью $П_2$ путем вращения вокруг оси z. Полученный таким образом плоский комплексный чертеж содержит три проекции точки А, причем как видно из рис. 2.2, каждая пара смежных проекций (A_1 и A_2; A_2 и A_3) лежит на одной прямой, перпендикулярной соответствующей оси. Такая прямая называется линией связи.

Две связанные между собой ортогональные проекции однозначно определяют положение точки относительно плоскостей проекций. При этом третья проекция не может быть задана произвольно. Как правило, в инженерной практике нет необходимости задавать положение фигуры относительно какой-либо системы координат. В этих случаях на комплексном чертеже отсутствуют изображения осей координат, а сам чертеж называют безосным. В соответствии со свойством 9 ортогонального проецирования, параллельное перемещение плоскостей проекций не влияет на форму изображения на чертеже. На безосном чертеже соответствующие линии связи всех точек пространства остаются параллельными друг другу: $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel \ldots$

Ось проекций в случае необходимости можно провести в любом месте, но обязательно перпендикулярно линиям связи.

Три взаимно перпендикулярные плоскости $П_1$, $П_2$ и $П_3$ делят пространство на восемь частей − октантов, принятая нумерация которых дана на рис. 2.1 (октант VII на рис. 2.1 не виден).

2.2 ПРЯМАЯ

2.2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Прямая на комплексном чертеже может быть задана проекциями пары точек

На рис. 2.4 показана пространственная модель, а на рис. 2.5 − комплексный чертеж прямой АВ. Проекции точек А и В определяют единственную прямую пространства. Для построения профильной проекции можно использовать разность профильных координат точек А и В, равную Δ.

Точка принадлежит прямой, если обе ее проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой ($K \subset AB$; $L \not\subset AB$).

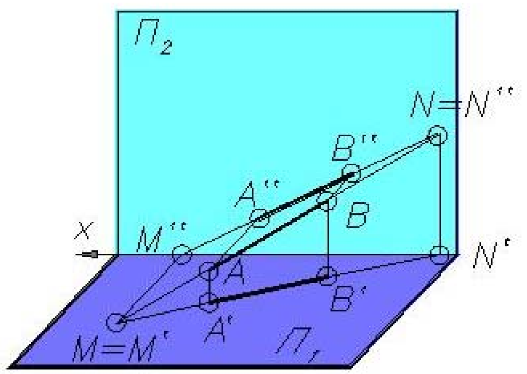


Рис. 2.4

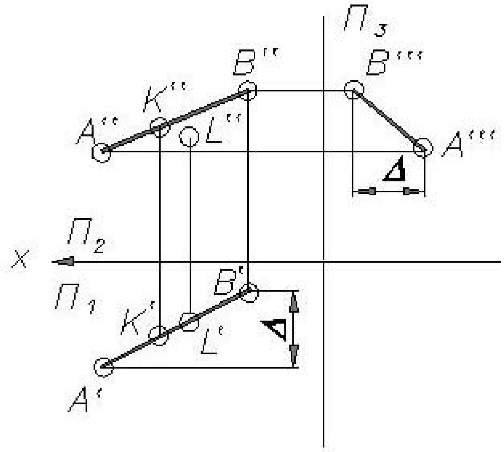


Рис. 2.5

Прямая может быть задана непосредственно своими двумя проекциями (например, m′ и m″). Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называют следами.

На рис. 2.4 показаны точки M и N, в которых прямая, заданная отрезком АВ, пересекает плоскости проекций. Точка M − горизонтальный след прямой, а точка N− фронтальный след.

Горизонтальная проекция горизонтального следа M’ совпадает с самим следом, а фронтальная проекция этого следа M” лежит на оси проекций. Фронтальная проекция фронтального следа N” совпадает с точкой N, а горизонтальная проекция N’ лежит на оси проекций.

Следовательно, чтобы найти горизонтальный след, надо продолжить фронтальную проекцию A”B” до пересечения с осью x и через точку M” (фронтальная проекция горизонтального следа) провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением горизонтальной проекции A”B”.

Точка M’ − горизонтальная проекция горизонтального следа, она совпадает с самим следом.

Для нахождения фронтального следа продолжим горизонтальную проекцию A’B’ до пересечения с осью x, через точку N’ (горизонтальную проекцию фронтального следа) проводим перпендикуляр до пересечения с продолжением фронтальной проекции A”B”. Точка N” − фронтальная проекция фронтального следа, она совпадает с самим следом.

Прямая не имеет следа на плоскости проекций в том случае, когда она параллельна этой плоскости. (Профильный след прямой − разобрать самим).

Прямые, не перпендикулярные и не параллельные плоскостям проекций, называют **прямыми общего положения.**

Линии, параллельные плоскостями проекций, называют **линиями уровня.**

Если прямая параллельна горизонтальной прямой плоскости проекций, ее называют **горизонталью** (рис. 2.6, а), фронтальной − **фронталью** (рис. 2.6, б), профильной − профильной прямой (рис. 2.6, в). Обозначают их соответственно буквами h, f и р.

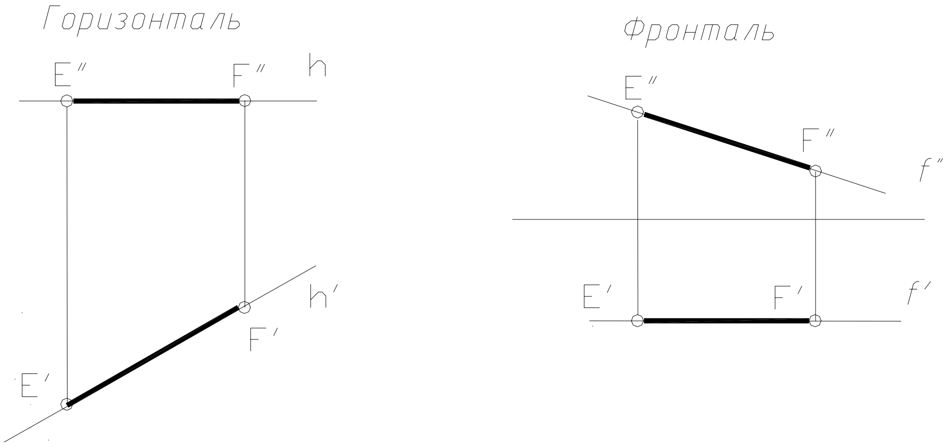


Рис. 2.6

У прямой уровня одна проекция параллельна самой прямой и определяет углы наклона этой прямой к двум другим плоскостям проекций (α − к Π_1 и β − к Π_2). Отрезок линии уровня в соответствии со свойством 4 ортогонального проецирования проецируется на параллельную ему плоскость проекций в натуральную величину. Параллельность по отношению к одной из плоскостей проекций определяет расположение двух других проекций прямой уровня. Так, $f' \parallel x_{12}$; $h'' \parallel x_{12}$ и т.д.

Линии нулевого уровня лежат в плоскостях проекций. Так, $h_0 \subset \Pi_1$; $f_0 \subset \Pi_2$ (рис. 2.7). Проекции этих линий лежат на осях проекций ($h_0'' \subset x_{12}$; $f_0' \subset x_{12}$).

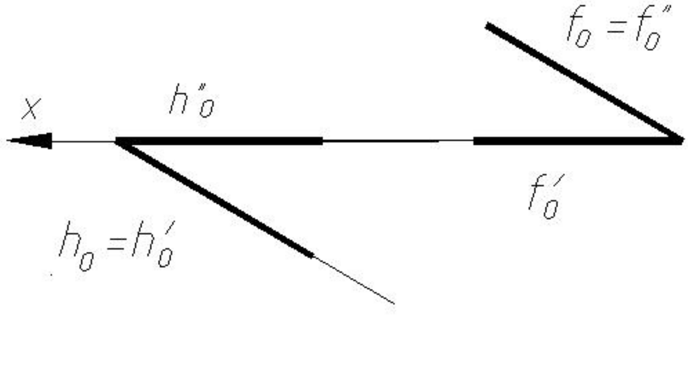


Рис. 2.7

Проецирующие прямые (прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций) также являются линиями уровня. Причем одна из ее проекций вырождается в точку. На рис. 2.8 приведены горизонтально проецирующая прямая m и фронтально проецирующая прямая n ($m \perp \Pi_1$; $n \perp \Pi_2$).

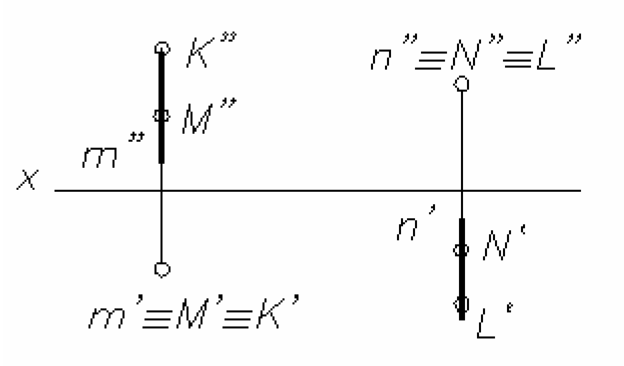


Рис. 2.8

Конкурирующие точки, лежащие на одной проецирующей прямой, дают возможность определить видимость отдельных элементов предмета на данной плоскости проекций. Из двух горизонтально конкурирующих точек K и M (рис. 2.8.) на плоскости $П_1$ видима та, которая расположена выше, т.е. K. Из двух фронтально конкурирующих точек L и N на плоскости $П_2$ видима та, которая ближе к наблюдателю, т.е. L, а точка N невидима, так как расположена за точкой L.

2.2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА

Длину (натуральную величину) отрезка общего положения можно определить на основании свойства 7 ортогонального проецирования как длину гипотенузы AB прямоугольного треугольника (рис. 2.9, а), один катет которого, например A'B' является проекцией отрезка, а другой равен превышению одного конца отрезка над другим $\Delta 2$.

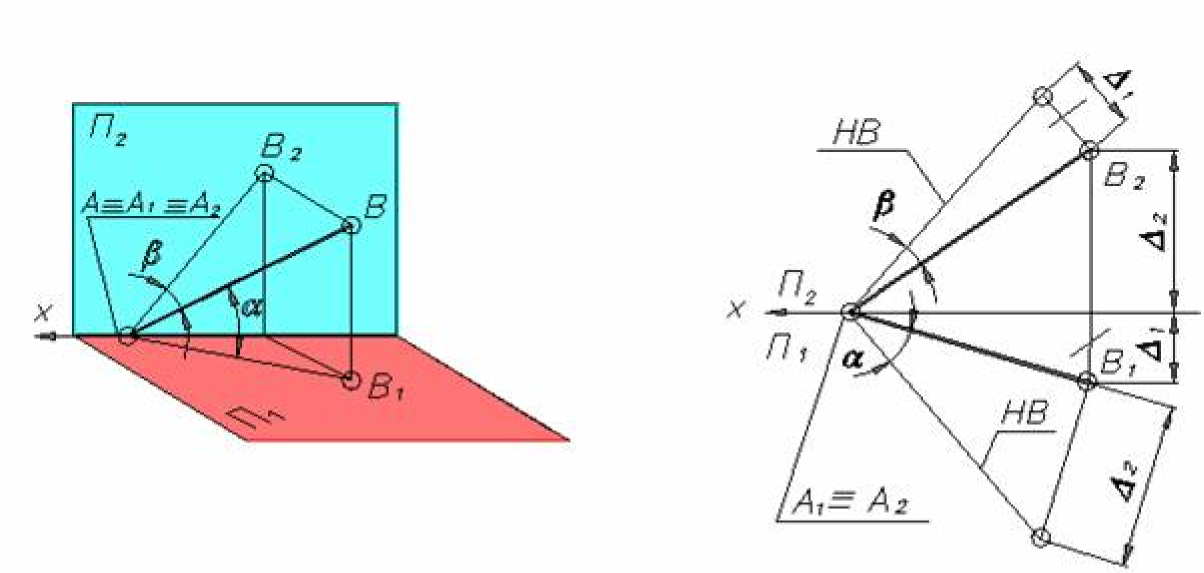


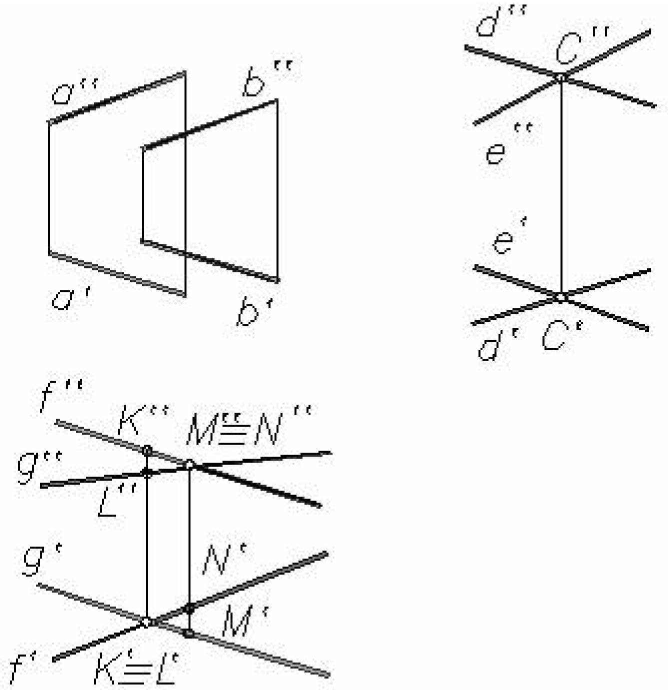
Рис. 2.9

Таким образом, на горизонтальной проекции комплексного чертежа отрезка (рис. 2.9., б) можно построить прямоугольный треугольник, взяв вторым катетом Δ_2. Гипотенуза этого треугольника будет натуральной величиной (НВ) отрезка AB, а угол α определит угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций $П_1$. Аналогичное построение можно сделать на фронтальной проекции отрезка, взяв в качестве второго катета разность глубин его концов $\Delta 1$ с плоскости $П_1$. Здесь β − угол между AB и плоскостью $П_2$.

2.2.3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Две прямые в пространстве, быть параллельными ($c \parallel d$), пересекаться ($e \cap g$), скрещиваться (k °/ l) − рис. 2.10, а, б, в, а также могут совпадать ($a \cong b$).

Если две прямые совпадают, то совпадают их проекции. Если две прямые параллельны, то на комплексном чертеже их одноименные проекции параллельны. Если две прямые пересекаются в некоторой точке C, то проекции этой точки должны принадлежать одноименным проекциям прямых, т.е. точки пересечения одноименных проекций пересекающихся прямых должны лежать на одной линии связи: $d \cap e = C \Rightarrow (d' \cap e' = C';\ d'' \cap e'' = C'')$.



в Рис. 2.10

Две скрещивающиеся прямые не имеют общей точки. Поэтому их одноименные проекции пересекаются в точках, не лежащих на одной линии связи: $f \cap g \Rightarrow f' \cap g' = K'\ (L');\ f'' \cap g'' = M''\ (N'')$.

Здесь K и L – **горизонтально конкурирующие**, а M и N – **фронтально конкурирующие** точки.

Часто бывает необходимо построить **перпендикуляр** к прямой уровня.

Рассмотрим пример. Пусть задана фронталь f (рис. 2.13). Требуется из точки A опустить на фронталь перпендикуляр n.

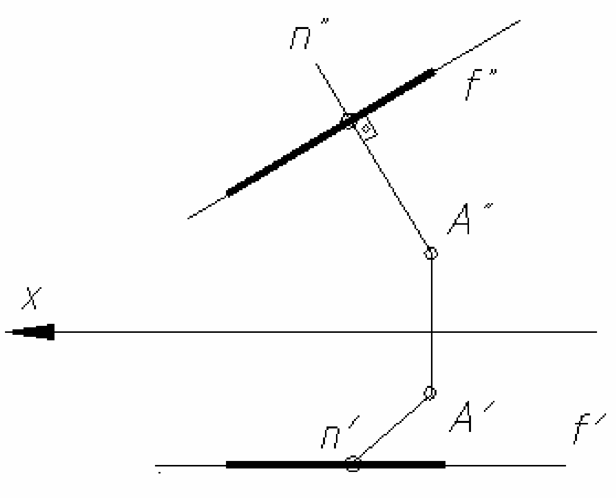


Рис. 2.13

На основании свойства 8 ортогонального проецирования прямой угол проецируется без искажения, если одна из его сторон – линия уровня. Следовательно, прямой угол между f и n проецируется на Π_2 в натуральную величину: $n'' \perp f''$, так как $n \perp f$ и $f \parallel \Pi_2$. Точка 1 – основание

перпендикуляра. Горизонтальная проекция перпендикуляра n' определяется положением точек 1' и A'.
Аналогично строится перпендикуляр m к горизонтали h (рис. 2.13, б).

Контрольные вопросы и задания (1 лекция)
1. Как определить угол наклона прямой общего положения к плоскостям проекций?
2. Приведите примеры чертежей частных положений прямых линий и укажите их названия.
3. Что называют следами прямой?
4. Какие прямые называют линиями уровня?
5. Какие прямые называют проецирующими?
6. Приведите пример пропорционального деления отрезка прямой линии в заданном отношении AB : BC = m : n.
7. Расскажите о взаимном расположении прямых линий.

8. Как изображают на чертежах пересекающиеся, скрещивающиеся и параллельные прямые общего положения?